Introduction à l'Actuariat

3A MMEFI M2 AMSE M2 IMSA

Renaud Bourlès

Introduction (1)

- Spécificité de l'assurance : cycle de production inversé
  Contrat d'assurance = promesse
  - $\Rightarrow$ Importance de la **prévision**
  - $\Rightarrow$ Importance de la **réglementation**

- Besoin d'évaluer **ex-ante** les prix (et les risques) de manière **précise**.
  C'est-à-dire
  - Évaluer le **temps** (actualisation, lien avec la finance)
  - Évaluer le **risque** (lien avec les probabilités)

Introduction (2)

On différencie

▷ Actuariat **VIE**

- assurance en cas de vie ou en cas de décès
- importance du temps
- moins d'aléa

▷ Actuariat **IARD**

- Incendie Accident et Risques Divers (non-vie)
- échéances courtes
- forte variabilité

Plan de cours

▷ **Le modèle de l'actuariat vie**

- Aléa de mortalité et erreur de tarification
- Les principaux contrats : prime juste et tarification prudente
- Calculs des VAP et notations
- Exercices

▷ **Les spécificités IARD**

- Le provisionnement
- Le chargement de sécurité
- Le rôle des marchés financiers

Bibliographie

- Tosetti A., Weiss F. et Poncelin T., *Les outils de l'actuariat vie*, Economica
- Charpentier A. et Dutang C., *L'Actuariat avec R*

Actuariat vie

- ▷ assurance en cas de vie ; en cas de décès
- ▷ importance du temps
  - ▶ valeur d'1€ plus tard?
  - ▶ actualisation (VAN), quel taux?
- ▷ événement aléatoire
  - ▶ utilisation des probabilités : **VAP** (Valeur Actuelle Probable)
  - ▶ quelle(s) probabilité(s)?
- ▷ La **tarification** repose sur :
  - ▶ prévision du taux
  - ▶ prévision de la mortalité

Un exemple simple : le capital différé en cas de vie

▷ Engagement : verser à l'assuré c€ dans k années si il est vivant

▷ Imaginons un assureur vendant n_a contrats de ce type au prix Π''

▷ Son résultat net en fin de contrat sera donc :

$$R_{n_a} = n_a.\Pi''.(1+i)^k - c.\mathcal{N}_V$$

où i est le taux d'intérêt
et $\mathcal{N}_V$ représente le nb d'assurés encore vivants en $t = k$ (aléatoire)

- ▷ en supposant que tous les assurés ont la même probabilité p d'être en vie en $t = k$
- ▷ et que ces probabilités sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_{n_a}) &= n_a.\Pi''.(1+i)^k - c.n_a.p \\ \sigma(R_{n_a}) &= c.\sigma(R_{n_a}) = c.\sqrt{n_a.p.(1-p)} \end{aligned}$$

- ▷ A.N. : $n_a = 10.000$, $c = 100.000$, $t = 8$, $i = 6\%$, $p = 0,9865$

$$\Pi'' = 63.000$$

$$\mathbb{E}(R_{n_a}) = 17.614.290 \qquad \sigma(R_{n_a}) = 1.154.030$$

- ▷ Remarques :
  - ▶ faible écart-type; contrat relativement "sûr" pour l'assureur
  - ▶ ici Π'' fixée; en général on cherchera la prime telle que $\mathbb{E}(R_1) = 0$ et on parlera de **prime actuarielle** (ou actuariellement juste) "**juste**" : engagement de l'assuré = engagement de l'assureur
  - ▶ la différence entre la prime commerciale et la prime actuarielle constitue **les provisions mathématiques**

Tables de mortalité (1)

- dans l'ex. précédent, proba de survie p la même pour tous
- dans les faits : utilisation de tables de mortalité **réglementaires**
- dépendantes de l'**âge** uniquement
- utilisation de la survie :
  - si $l_x =$ (nombre d'assurés d'âge x à $t = 0$)
  - et $l_{x+k} =$ (nombre d'assurés d'âge x à $t = 0$ vivant à $t = k$)
- proba(un ind. d'âge x en $t = 0$ soit vivant en $t = k$) $= \frac{l_{x+k}}{l_x}$
- proba(un ind. d'âge x en $t = 0$ décède **avant** $t = k$) $= 1 - \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x}$
- Exemples : proba(un ind. de 35 ans décède avant 45 ans)$=1 - \frac{l_{45}}{l_{35}}$
  proba(un ind. de 35 ans décède entre 40 et 45 ans)$=\frac{\cdots}{\cdots}$

Tables de mortalité (2)

- ▷ Loi de survie d'un individu d'âge x: l_x, l_{x+1},...,l_{x+k},...,l_w
  où w est l'âge extrême de la vie humaine ($\approx$ 110 ans)
- ▷ **Tables de mortalité**: loi de survie en partant de $l_0 = 100.000$

Il existe différentes tables. **Choix fixé par la réglementation**

- ▷ TD et TV 88-90 (arrêté d'avril 1993) ; observations INSEE 1988-1990
  - ▶ TD 88-90: pop. d'**hommes** ; utilisée pour assurance en cas de **décès**
  - ▶ TV 88-90: pop. de **femmes** ; utilisée pour assurance en cas de **vie**
- ▷ remplacée par TH et TF 00-02 ; applicables depuis 2006
  lissées : correctif d'âge $\leftarrow$ écarts de mortalité entre générations
- ▷ ICI on utilisera TD et TV 88-90 (plus simples d'utilisation)

Aléa de mortalité et erreurs de tarification

▷ La tarification des contrats (prévisions) et

▷ les résultats de l'assureur (réalisation), dépendent donc fortement :

- des **hypothèses** de mortalité (table)
- des hypothèses de taux

▷ Autrement dit, l'assureur (vie) doit fait face :

- aux aléas de mortalité
- aux erreurs de tarification ("du temps")

▷ En fonction des caractéristiques du contrat

▷ ces **risques** sont plus ou moins importants

Les principaux contrats (simples)

Pour les principaux contrats simples, on va :

- ▷ Calculer la prime pure / juste, c'est-à-dire la **VAP**
- ▷ Étudier comment elle varie en fonction des hypothèses
- ▷ Comparer aléa de mortalité et erreurs de tarification
- ▷ Définir la **tarification prudente**
- ▷ Calculer la **variance** de la charge annuelle du contrat

Capital différé (le retour)

- ▷ Rappel : verser à l'assuré c€ dans k années si il est vivant
- ▷ On cherche Π tel que $\mathbb{E}(R_1) = 0$, c'est-à-dire

$$\Pi(1+i)^k - c.p = 0$$

  où p représente la proba que l'assuré soit encore vivant dans k années

- ▷ En notant $v \equiv \frac{1}{1+i}$ le taux d'actualisation, on a :

$$\Pi = \frac{c.p}{(1+i)^k} = c.v^k.\frac{l_{x+k}}{l_x}$$

- ▷ C'est la **Valeur Actuelle Probable** du contrat

▷ A.N : $x = 40$, $k = 8$, $c = 100.000$

Π	TD 88-90	TV 88-90
$i = 3.5\%$	...	74.917
$i = 7\%$	56.412	57.416

▷ taux d'actualisation (8 ans) plus important que l'aléa de mortalité

▷ tarification prudente : $i = 3.5\%$ & TV (**réglementaire**)

▷ Charge de la prestation (pour l'assureur) pour un contrat vue en $t = 0$:

$$X_i = \begin{cases} c.v^k & \text{avec probabilité } p = \dfrac{l_{x+k}}{l_x} \\ 0 & \text{avec probabilité } (1-p) \end{cases}$$

▷ d'où $\mathbb{E}(X_i) = \Pi$ et $\sigma(X_i) = c.v^k.\sqrt{\dfrac{l_{x+k}}{l_x}\left(1 - \dfrac{l_{x+k}}{l_x}\right)}$

- soit pour n contrats (identiques et indépendants) : $\mathbb{E}(X) = n.\Pi$ et $\sigma(X) = \sqrt{n}\sigma(X_i)$

- c'est-à-dire avec 10.000 contrats et la tarification prudente supra : $\mathbb{E}(X) = 749.170.000$ et $\sigma(X) = 100.\sigma(X_i) = 876.150$

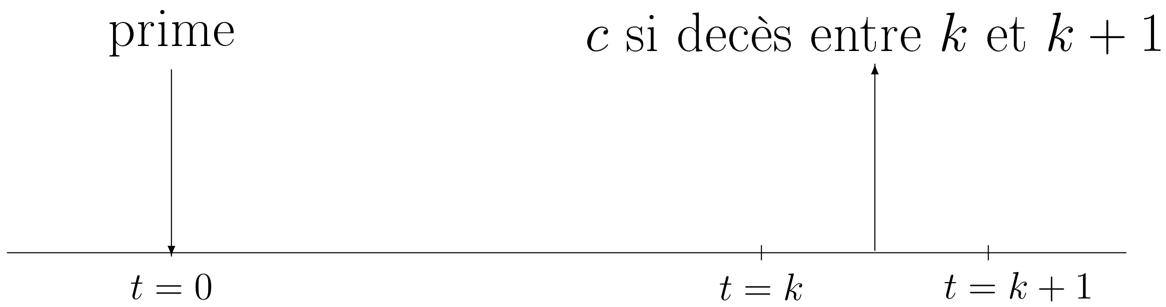
- On aboutit donc avec un intervalle de confiance à 95% pour la charge totale des prestation :

$$[X]_{95\%} = [747.452.746, 750.887.254]$$

- Petit intervalle $\rightarrow$ **peu de risque** pour l'assureur

La temporaire décès (différée)

▷ Engagement (en $t = 0$): verser au bénéficiaire c€ à la mort de l'assuré si celui-ci meurt entre $t = k$ et $t = k + 1$



▷ **Attention** : versé à la mort de l'assuré pas à la fin du contrat

▷ **Hypothèse** : les décès sont uniformément répartis sur l'année

- ▷ en espérance tous les décès on lieu en $k + \frac{1}{2}$
- ▷ ainsi en $t = k + 1$

$$\mathbb{E}(R_1) = \underbrace{\left(\Pi(1+i)^{k+\frac{1}{2}} - cq\right)}_{\text{en } t = k + \frac{1}{2}} .(1+i)^{\frac{1}{2}}$$

- ▷ où q représente la probabilité de décès entre $t = k$ et $t = k + 1$

▷ La prime pure / juste s'écrit donc

$$\Pi = \frac{c.\frac{l_{x+k}-l_{x+k+1}}{l_x}}{(1+i)^{k+\frac{1}{2}}}$$

▷ A.N. : $x = 40$, $k = 0$ (immédiate), $c = 100.000$

Π	TD 88-90	TV 88-90
$i = 3.5\%$	280	122
$i = 7\%$	275	...

▷ peu d'impact du taux (immédiat), gros aléa de mortalité

▷ tarification prudente :$i = 3.5\%$ & TD (**réglementaire**)

▷ $\sigma(X_i) = c.v^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right)\frac{l_{x+1}}{l_x}} = 5.239, 7$ (très important)

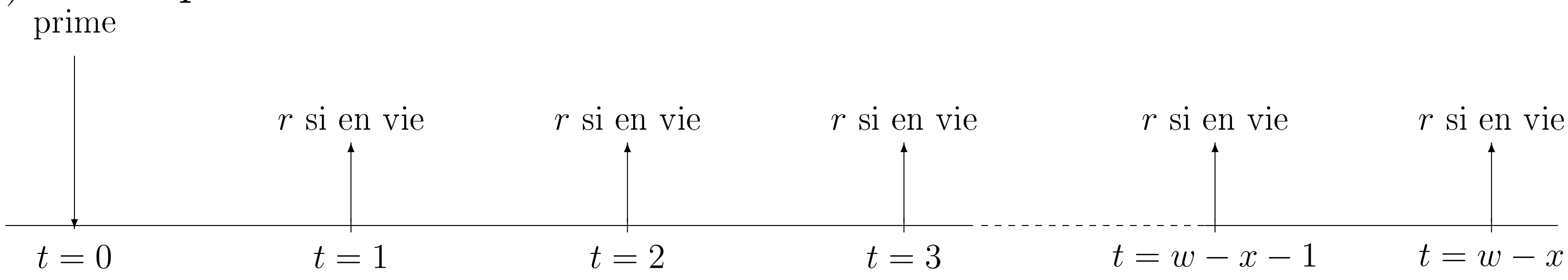
⇒ Pour 10.000 contrats (avec la tarification prudente)

$$[X]_{95\%} = [1.774.160, 3.828.120]$$

⇒ **l'incertitude est forte!**

La rente viagère (à terme échu)

▷ Engagement: verser à l'assuré r€ à la fin de chaque année (à terme échu) tant qu'il est vivant



▷ Prime pure :

$$\Pi = \dots$$

▷ A.N. : $r = 10.000$, $x = 65$ (**retraite**)

Π	TD 88-90	TV 88-90
$i = 3.5\%$	107.932	132.524
$i = 7\%$	...	97.581

(somme à verser à 65 pour obtenir 10.000€ par an jusqu'à sa mort)

▷ fort impact du taux **et** de la mortalité!

▷ tarification prudente : $i = 3,5\%$ et TV

▷ Charge d'un contrat :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\ \ldots & \text{avec probabilité } \ldots \\ \ldots & \text{avec probabilité } \ldots \\ . & \\ . & \\ . & \\ \ldots & \text{avec probabilité } \ldots \end{cases}$$

▷ d'où, avec la tarification prudente

$$\mathbb{E}(X_i) = \Pi = 132.524 \text{ et } \sigma(X_i) = \sqrt{\mathbb{E}(X_i^2) - [\mathbb{E}(X_i)]^2} = 44.448,72$$

▷ soit pour 10.000 assurés

$$[X]_{95\%} = [1.316.528.050, 1.333.951.950]$$

Calcul de VAP et notations

- $T_x \equiv$ durée aléatoire de survie d'un individu d'âge x
- $\mathbb{P}(T_x > k) \;=\; \frac{l_{x+k}}{l_x} \;\equiv\; {}_k p_x$
- $\mathbb{P}(k < T_x < k+k') \;=\; \frac{l_{x+k}-l_{x+k+k'}}{l_x} \;\equiv\; {}_{k|k'}q_x$
- Valeur actuelle probable des **engagements fondamentaux**

$$ {}_{k|k'}\mathrm{VAP}_x $$

où k représente le différé
et k' la durée

Engagements élémentaires

- Engagement élémentaire **en cas de vie**
  (1 € versé dans k année si l'assuré âgé de x ans est encore vivant)

$$ {}_kE_x \equiv v^k . \frac{l_{x+k}}{l_x} $$

- Engagement élémentaire **en cas de décès**
  (1 € versé si l'assuré agée de x ans meurt entre k et $k+1$)

$$ {}_{k|1}A_x \equiv v^{k+\frac{1}{2}} . \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} $$

- Annuité viagère
  - payable d'avance : $\ddot{\text{a}}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + ... + {}_{w-x-1}E_x$
  - à terme échu : $\text{a}_x = {}_1E_x + {}_2E_x + ... + {}_{w-x}E_x$

- Garantie décès vie entière ($\approx$ contrat obsèques)

$$ A_x = {}_{0|1}A_x + {}_{1|1}A_x + ... + {}_{k|1}A_x + ... + {}_{w-x-1|1}A_x $$

Les nombres de commutation sur une tête

▷ Pour faciliter les calculs : commutations

▷ Tables : pour un taux d'i. et une table de mortalité donnée

▷ **Commutations en cas de vie**

$$D_x \equiv v^x l_x \quad \text{et} \quad N_x \equiv D_x + D_{x+1} + \ldots + D_w$$

donnent

$${}_kE_x = \frac{D_{x+k}}{D_x}, \quad \ddot{\mathrm{a}}_x = \frac{N_x}{D_x}, \quad \mathrm{a}_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad \text{et} \quad {}_{m|n}\ddot{\mathrm{a}}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

▷ **Commutations en cas de décès**

$$C_x \equiv v^{x+\frac{1}{2}} (l_x - l_{x+1}) \quad \text{et} \quad M_x \equiv C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{w-1}$$

donnent

$${}_{k|1}A_x = \frac{C_{x+k}}{D_x}, \quad A_x = \frac{M_x}{D_x} \quad \text{et} \quad {}_{m|n}\mathrm{A}_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Exercices

- Une garantie $C = 10.000€$ sera versée à un bénéficiaire en cas de décès au cours des trois prochaines années d'une personne qui est simultanément assurée et souscripteur et dont l'âge est aujourd'hui de 50 ans.

  Tarifer (avec $i = 3\%$) le contrat en prime pure unique puis en primes annuelles constantes payables d'avance pendant 3 ans.

- Un emprunt d'un montant de $K = 10.000€$ est remboursable en 3 annuités constantes de 4.000€ versés à termes échu. Un contrat d'assurance garanti, en cas de décès de l'emprunteur, le remboursement des annuités restantes dues aux échéances prévues.

  Quelle est la valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur vue à la date où l'emprunt est contracté? Faire l'application numérique pour un assuré âgé de 40 ans lors de l'obtention de l'emprunt et un taux technique de 3%

  Calculer la prime pure constante payable d'avance et pendant toute la durée du prêt.

Extensions

- Engagement basé sur le premier décès du couple

$$1 - \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+k}}{l_y}$$

- Rente viagère de x réversible (en partie) sur y

$$\frac{l_{x+k}}{l_x} + \alpha . \left(1 - \frac{l_{x+k}}{l_x}\right) . \frac{l_{y+k}}{l_y}$$

- Engagements croissants
  - Progression géométrique $\left((1+\rho)^k\right)$
  - Progression arithmétique $(k+1)$

- Taux variables

$$v_k = \frac{1}{1+i_1} . \frac{1}{1+i_2} ... \frac{1}{1+i_k}$$

Assurance Incendie Accident et Risque Divers

Différences avec l'assurance vie

- ▷ Échéances beaucoup plus faibles
- ▷ Variance beaucoup plus grande

Mais aussi

- ▷ Vitesse de règlement des sinistres (plus lent)

$\Rightarrow$ Comptabilité plus compliquée (**provisionnement**)

$\Rightarrow$ Importance du **chargement de sécurité** (implicite/réglementé en vie)

$\Rightarrow$ Importance des placements sur les **marchés** fin.

Spécificités comptables

▷ La comptabilité suit les **montants** et non le nombre de sinistres!

⇒ Difficile de suivre les fréquences et les coûts moyens...

⇒ La rentabilité d'un portefeuille est évaluée par le rapport **S/P**: (somme des montants de) sinistres sur (somme des) primes

▷ Temps de règlements des sinistres

⇒ Différences entre exercice comptable et **exercices de survenance**

- Sinistres survenus mais pas encore réglés
- Sinistres survenus mais pas encore connus
- On parle de **tardifs** ou de IBNR (Incurred But Not Reported)

⇒ Trois états comptables

- le C1 qui traduit l'exercice comptable
- le C10 et le C11 qui traduisent l'exercice de survenance (resp. "sinistres" et "primes et résultats")

Provisionnement

- ▷ Pour permettre le paiement des tardifs
- ▷ les compagnies d'assurance doivent **provisionner**
- ▷ c'est-à-dire garder des liquidités à l'année n
- ▷ pour des sinistres (des contrats) des années précédentes

- ▷ la différence entre les provisions et la charge (réelle) des sinistres (de l'année $n-k$ en n)
- ▷ détermine un **boni** (ou un **mali**) de liquidation de provisionnement

Un exemple simple

- ▷ Considérons l'exemple suivant dans lequel
- ▷ on étudie l'**évolution des provisions** à la fin de l'année n
- ▷ on détermine les boni et mali

		$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n	Total
	Règlements à l'année n	1	2	10	177	294	484
+	Provisions au $31/12/n$	1	2	4	15	140	162
-	Provisions au $01/01/n$	2	5	14	187		208
							438
=	Charge des sinistres survenus en n					434	434
+	Charge des sinistres survenus avant n	0	$\underbrace{-1}_{\text{boni}}$	0	$\underbrace{5}_{\text{mali}}$		4

- ▷ La liquidation des provisions s'est traduite par un **mali** de 4
- ▷ à cause de provisions **mal évaluées** pour l'exercice $n-1$

La prédiction des tardifs : la Chain-Ladder

- Comment calcule-t-on les prévisions pour tardifs? (et les met-on à jour)
- Méthode la plus commune : Chain-Ladder
- **Hypothèse** : il existe une régularité sur la **cadence des paiements**
- On utilise pour cela les incréments de paiements $X_{i,j}$
  i.e. les charges payées en $i + j$ pour des sinistres survenus en i
- et les paiement cumulés $C_{i,j} = X_{i,0} + X_{i,1} + ... + X_{i,j}$
- La méthode Chain-Ladder fait l'hypothèse que

$$C_{i,j+1} = \lambda_j . C_{i,j}, \qquad \forall i, j$$

  i.e. qu'il existe une **relation de récurrence** sur les charges cumulées

Paiements cumulés et provision

▷ Après t années, le montant restant à payer pour les sinistre de l'année i est

$$R_{i,t} = C_{i,\infty} - C_{i,t}$$

▷ Et la **provision** pour sinistres à payer sera l'**estimation**

$$\widehat{R}_{i,t} = \mathbb{E}\left(R_{i,t} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(C_{i,\infty} \mid \mathcal{F}_t\right) - C_{i,t}$$

où $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible après t années

$$\mathcal{F}_t = \left\{(C_{i,j}, 0 \leq i+j \leq t\right\} = \left\{(X_{i,j}, 0 \leq i+j \leq t\right\}$$

▷ *Remarque* : $\left(\mathbb{E}\left(C_{i,\infty} \mid \mathcal{F}_t\right)\right)_t$ est une martingale

▷ La méthode des Chain-Ladder consiste à estimer les λ_j

▷ sur la base d'observations sur n années ($n-j$ obs pour chaque j)

L'estimateur Chain-Ladder

▷ Estimateur Chain-Ladder: **ratio moyen** (pondéré) sur les $n-j$ obs.

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

▷ c'est-à-dire $\widehat{\lambda}_j = \sum_{i=1}^{n-j-1} \omega_{i,j}.\lambda_{i,j}$ avec $\omega_{i,j} \equiv \frac{C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j-1} C_{i,j}}$ et $\lambda_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$

▷ *Remarque* : $\widehat{\lambda}_j = \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{\arg\min} \left\{ \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}. \left[\lambda - \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}\right]^2 \right\}$
(obtenu par une rég. lin. pondérée sans constante de $C_{i,j+1}$ sur $C_{i,j}$)

▷ On peut alors estimer les paiements cumulés

$$\widehat{C}_{i,j} = \left[\widehat{\lambda}_{n-i+1} \cdots \widehat{\lambda}_{j-1}\right] C_{i,n-i+1}$$

▷ et donc les provisions à payer
(en supposant que tous les sinistres ont été clôturés après n années)

Exemple (1)

$X_{i,j}$	0	1	2	3	4	5
1	3209	1163	39	17	7	21
2	3367	1292	37	24	10	
3	3871	1474	53	22		
4	4239	1678	103			
5	4929	1865				
6	5217					

$C_{i,j}$	0	1	2	3	4	5
1	3209	4372	4411	4428	4435	4456
2	3367	4659	4696	4720	4730	
3	3871	5345	5398	5420		
4	4239	5917	6020			
5	4929	6794				
6	5217					

▷ On a alors

$$\widehat{\lambda}_0 = 1,38093 \; ; \; \widehat{\lambda}_1 = 1,01143 \; ; \; \widehat{\lambda}_2 = 1,00434 \; ; \; \widehat{\lambda}_3 = \ldots \; ; \; \widehat{\lambda}_4 = 1,00474$$

▷ Et on peut compléter le tableau

$C_{i,j}$	0	1	2	3	4	5
1	3209	4372	4411	4428	4435	4456
2	3367	4659	4696	4720	4730	**4752,4**
3	3871	5345	5398	5420	**5430,1**	**5455,8**
4	4239	5917	6020	...	**6057,4**	**6086,1**
5	4929	6794	**6871,7**	**6901,5**	**6914,3**	**6947,1**
6	5217	**7204,3**	**7286,7**	**7318,3**	**7331,9**	**7366,7**

Exemple (2)

- ▷ En supposant que 5 années sont suffisantes pour traiter tous les sinistres
- ▷ On provisionne donc
  - ▶ 22,4 pour l'année 2
  - ▶ 35,8 pour l'année 3
  - ▶ 66,1 pour l'année 4
  - ▶ ... pour l'année 5
  - ▶ 2149,7 pour l'année 6
- ▷ Soit au total 2427,1

- ▷ L'**année suivante** on observe une diagonale supplémentaire,
- ▷ ce qui modifie les estimations et donc les provisions
- ▷ et créé les **boni et mali**

Extensions

▷ Modèle probabiliste (utilise également $\text{Var}(C_{i,j+1} \mid C_{i,j})$)

$$C_{i,j+1} = \lambda_j . C_{i,j} + \sigma_j . \sqrt{C_{i,j}} . \epsilon_{i,j}$$

avec $\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j-1} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{\lambda}_j \right)^2 . C_{i,j}$

▷ Modèles économétriques (régression poissonnienne)

- Hypothèses
  - un facteur ligne (année) et un facteur colonne (délai)
  - impact multiplicatif
- $X_{i,j} \sim \mathcal{P}(A_i . B_j) \Rightarrow \mathbb{E}(X_{i,j}) = A_i . B_j$
- $\widehat{X}_{i,j} = \widehat{A}_i . \widehat{B}_j$
- On peut monter qu'on retrouve alors les même prédictions qu'avec l'estimateur Chain-Ladder

Prime pure et risque IARD

- Contrairement à un contrat d'assurance vie
- il peut y avoir **plusieurs sinistres** sur un contrat IARD.
- La charge d'un contrat (X) dépendra donc :
  - du nombre de sinistres sur ce contrat : N (aléatoire)
  - du coût de chacun de ces sinistres : Y_i, $i = 1, \dots, N$ (aléatoires)

  avec $X = Y_1 + \dots + Y_N$
- la **prime pure** sera alors :

$$\Pi = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}_N[\mathbb{E}(X \mid N)] = \mathbb{E}_N[\mathbb{E}(Y_1 + \dots + Y_N \mid N)]$$

- Ainsi, si
  - les Y_{ij} (les coûts du $j^{\text{ème}}$ sinistre de l'individu i) sont i.i.d. sachant N_i (le nombre de sinistres de l'individu i)
  - les N_i sont i.i.d.

  alors, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}_N[\mathbb{E}(N.Y)] = \mathbb{E}(N).\mathbb{E}(Y)$

Variabilité d'un risque IARD

▷ De même, la variance de la charge d'un contrat dépend à la fois

- de la **variabilité du nombre** de sinistres par contrat
- de la **variabilité du coût** d'un sinistre

▷ Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}_N[\mathbb{E}(X^2 \mid N)] = \mathbb{E}_N[\mathbb{E}((Y_1+\ldots+Y_N)^2 \mid N)] \\ &= \mathbb{E}_N\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N Y_i^2 \mid N\right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j\neq i} \mathbb{E}(Y_iY_j \mid N)\right] \\ &= \mathbb{E}_N\left[N.\mathbb{E}(Y^2) + N.(N-1)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y)\right] = \mathbb{E}(N).\text{Var}(Y) + \mathbb{E}(N^2).\left[\mathbb{E}(Y)\right]^2\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(N).\text{Var}(Y) + \mathbb{E}(N^2).\left[\mathbb{E}(Y)\right]^2 - \left[\mathbb{E}(N).\mathbb{E}(Y)\right]^2 \\ &= \left[\mathbb{E}(Y)\right]^2.\text{Var}(N) + \mathbb{E}(N).\text{Var}(Y)\end{aligned}$$

▷ Et dans le **cas particulier** où $\text{Var}(N) = \mathbb{E}(N)$ (par ex. si $N \sim \mathcal{P}$)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(N).\mathbb{E}(Y^2)$$

Exemple

Soit un portefeuille de 400.000 contrats identiques pour lesquels

- ▷ le nombre de sinistres sur un contrat peut-être approximé par une $\mathcal{P}(0,07)$
- ▷ les sinistres d'un montant inférieur à $M = 200.000$ € ont une espérance $C_1 = 10.540$ € et un écart-type $\sigma_1 = 19.000$ €
- ▷ une proportion $p = 1\%$ des sinistres sont d'un montant supérieur ou égal à M (pour écrêtage). L'espérance de ces gros sinistres est $C_2 = 410.000$ € et leur écart-type $\sigma_2 = 1.3$ M€

- ▶ Calculer la prime pure annuelle d'un contrat
- ▶ Calculer l'écart-type de la charge annuelle des sinistres sur un contrat
- ▶ L'assureur estime ses frais à 15% de la prime commerciale Π''
  Calculer la valeur de Π'' qui rend inférieure à 10% la proba d'enregistrer, sur la globalité du portefeuille, une **perte supérieure à** 20 M€

Lien avec la réglementation

- ▷ **Value at risk** à $1-\alpha\%$ ($\text{V@R}_{1-\alpha}$) : perte potentielle pouvant survenir sur un portefeuille avec une probabilité α
- ▷ Quantile de niveau α de la distrib de pertes et profits X:
  $\mathbb{P}(X > \text{V@R}_{1-\alpha}) = \alpha$

- ▷ **Solvabilité 2** : le Solvency Capital Requirement (SCR)
  - ▶ capital en dessous duquel une augmentation du capital est obligatoire
  - ▶ correspond à une **Value at risk** à $99,5\%$ à un an
  - ▶ capital suffisant pour absorber des événements imprévus bicentenaires

Actuariat IARD et marchés financiers

- ▷ En actuariat VIE : taux d'intérêt sans risque i
- ▷ En IARD, pas d'hypothèse sur le placement des primes et des provisions
- ▷ Pourtant, impact direct sur le résultat de l'assureur
- ▷ Même en cas de baisse de la sinistralité,
- ▷ l'équilibre fin. peut être mis en danger par de "mauvais" placements c'est-à-dire une détérioration de l'actif
- ▷ Étude de cas : évolution des tarifs de l'assurance auto entre 2002 et 2003 (réalisée par Gilbert THIRY, Conseil en Entreprises)

Étude de cas – Hypothèses de calcul (1)

- ▷ Équilibre financier atteint pour un ratio S/P=78%
- ▷ Résultat technique

Actif	Passif
Primes : 100	Sinistres : 78
Produits financiers : 7	Frais généraux : 29

- ▷ Après un an
  - ▶ Fréquence annuelle des sinistres : -6%
  - ▶ Coût moyen : +2%

  ⇒ charge des sinistres : -4% (0,94x1,02=0,96)
  - ▶ produits financiers : -10%
  - ▶ frais généraux : +2%

Étude de cas – Hypothèses de calcul (2)

- ▷ Le même équilibre technique peut donc être obtenu
- ▷ en diminuant les primes de $1,8\%$

Actif	Passif
Primes : ...	Sinistres : 74,9
Produits financiers : 6,3	Frais généraux : 29,6

- ▷ **Problème** : La baisse des marchés financiers a également conduit à
- ▷ une moins-value sur le **placement des provisions**
- ▷ qui représentent 1,2 fois les primes annuelles

- ▷ Pour la structure de l'encours des placement de l'ens. des comp. d'ass.
- ▷ une baisse de 30% du portefeuille action donne :

	2002	2003
Obligations	66	66
Actions	25	17,5
Immobilier et autre	9	9
Total	100	92,5

Étude de cas – Majoration des cotisations

- ▷ Afin de reconstituer les réserves
- ▷ il faudrait donc majorer les cotisation de :

$$7,5\% \text{ x } 1,2 = 9\%$$

- ▷ Cette majoration est atténuée par les bons résultats techniques.
- ▷ Afin d'éviter un appauvrissement,
- ▷ le montant des cotisations (à parc constant) doit donc augmenter de

$$1,09 \text{ x } (1 - 0,982) = 1,07 \;\; \text{soit } 7\%$$

Étude de cas – Exercice

▷ Ce résultat est évidemment influencé par la structure du portefeuille

▷ Sous les mêmes hypo., la majoration des cotisations nécessaire à deux compagnies

	Compagnie A	Compagnie B
Obligations	51	81
Actions	40	10
Immobilier et autre	9	9

▷ sera fortement influencée par la part des actions dans les placements