

Arbitrage et hedging

Renaud Bourlès Mohamed Belhaj

Aix-Marseille School of Economics
Master Finance

2024-2025

Organisation du cours

- ▶ 9 heures avec Renaud Bourlès
(<http://renaud.bourles.perso.centrale-marseille.fr/>)
- ▶ 9 heures avec Mohamed Belhaj
(<https://www.amse-aixmarseille.fr/fr/membres/belhaj>)
- ▶ Format cours / TD
 - ▶ participation attendue
 - ▶ exercices à préparer
- ▶ **Examen final** : examen écrit d'1h30
- ▶ *Bibliographie*
 - ▶ Introduction to the mathematics of finance, S. Roman, Springer

Introduction : marchés et produits financiers

Rôle des marchés financiers

- ▶ allocation du capital et **financement** des investissements
 - actions / obligations
- ▶ **gestion des risques** (prix des matières premières, taux de change)
 - produits dérivés (contrats à termes, produits contingents)

Par exemple

- ▶ Un exportateur FR signant un contrat avec un client US en \$
 - ▶ peut vouloir se couvrir contre le risque de dépréciation du \$
 - ▶ en fixant le taux de change à la signature du contrat
- ▶ Un producteur de blé peut vouloir se couvrir contre le risque
 - ▶ que le prix de vente de son stock passe sous son point d'équilibre
 - ▶ en fixant le prix de vente avant la moisson
- ▶ Dans les deux cas, l'investisseur est "perdant" en cas de mouvement opposé

Introduction : exemple de produits financiers



POUR QUI ?

Les producteurs, les centres de stockage, les meuniers, les fabricants de pâtes et les coopératives, par exemple, qui cultivent, stockent et vendent ou achètent du blé dur tout au long de l'année et souhaitent se couvrir contre le risque de prix.

Extrait du fascicule du contrat à terme sur le blé d'Euronext

Introduction : les acteurs sur les marchés financiers

Les marchés financiers sont composés

- ▶ d'**investisseurs** qui sont **price taker** et viennent sur le marché
 - ▶ pour y chercher des prix et éventuellement conclure des transactions
 - ▶ ils s'exposent aux fluctuations du produit traité
 - ▶ il peut s'agir d'investisseurs institutionnels, d'asset managers ou de particuliers
- ▶ de **market makers** en permanence sur les marchés pour fixer les prix
 - ▶ on parle de **price setters** contractuellement engagés à afficher en permanence les prix auxquels ils sont prêts à acheter (bid) ou vendre (ask) un produit.
 - ▶ dès qu'ils traitent un produit pour un investisseur, initient en parallèle une **opération de couverture** pour se couvrir contre les fluctuations du produit traité
 - ▶ principale source de profit : écart prix d'achat - prix de vente (bid-ask spread)
 - ▶ il s'agit principalement de banques d'investissement et de courtiers (brokers)

Introduction : l'arbitrage et les arbitragistes

- ▶ Lorsqu'ils repèrent une incohérence de prix, générant des gains potentiels un 3ème type d'acteurs : **les arbitragistes**
- ▶ en profitent en initiant des positions simultanées d'achat/vente.
- ▶ Opportunités recherchées et exploitées par des programmes informatiques
- ▶ au sein des bq d'investissement et des sociétés de trading haute fréquence.
- ▶ En recherchant et exploitant systématiquement ces opportunités
- ▶ ils garantissent qu'aucune ne persiste (via l'ajustement des prix)
- ▶ L'**absence d'opportunité d'arbitrage** est alors un concept clé
- ▶ permettant l'évaluation / le pricing des produits financiers, notamment dérivés

Introduction : exemple d'opportunité d'arbitrage

Les opportunités d'arbitrage les plus courantes concernent

- ▶ l'arbitrage **spatial** exploitant des différences de prix pour le même produit sur différents marchés
- ▶ l'arbitrage d'**index** exploitant des différences de prix entre un indice (S&P500, CAC40,...) et les produits qui le composent
- ▶ l'arbitrage **triangulaire** exploitant des écarts dans les taux de change entre trois devises (exemple pratique au slide suivant)

Au-delà des marchés financiers, des opportunités d'arbitrage peuvent apparaître

- ▶ sur le marché de l'immobilier (location longue durée vs Airbnb)
- ▶ sur la revente de billets ou de produits (~ arbitrage spatial)



Introduction : exemple d'arbitrage triangulaire

Si on néglige les coûts de transaction, les cotations suivantes

Marché	Taux de change
Paris	1 € = 1,1 \$
New-York	1 \$ = 150 ¥
Tokyo	1 ¥ = 0,007€

créent une opportunité d'arbitrage : un arbitragiste peut

- ▶ échanger 1€ contre 1,1 \$ à Paris
- ▶ échanger ces 1,1 \$ contre 165 ¥ ($150 \times 1,1$) à New York
- ▶ échanger 165 ¥ contre 1,155 € ($165 \times 0,007$) à Tokyo
- ▶ et réaliser un gain certain de 0,155 € par € initial.

→ l'exploitation systématique de cette opportunité rétablit des taux "cohérents"

Introduction : définition d'une opportunité d'arbitrage

Definition

Une opportunité d'arbitrage est une stratégie permettant d'obtenir un profit **certain, sans coût**.

Une telle stratégie doit donc être

1. auto-financée et
2. ne conduire à des pertes dans aucun **état de la nature**.

Elle se distingue d'une stratégie de spéculation, qui :

- ▶ rapporte un profit strictement positif si les anticipations sont correctes,
- ▶ mais peut conduire à des pertes si elles le sont pas.

Plan du cours

1. L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et ses implications
2. Évaluation par arbitrage et portefeuille de réplication
3. Application à l'évaluation d'options via le modèle binomial
4. Temps continu et mouvements browniens (MB)
5. Processus de diffusion et équation aux dérivées partielles en finance (MB)
6. Le Modèle de Black-Scholes : absence d'opportunité d'arbitrage et delta-hedging (MB)

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et ses implications

Formalisation : incertitude et état du monde

- ▶ Différence entre arbitrage et spéculation = caractère certain des gains
 - ▶ quelque soit la réalisation de l'**incertitude** future

Pour définir plus précisément une opportunité d'arbitrage (et l'incertitude)

- ▶ on suppose qu'il 2 dates, indexées par t
 - ▶ $t = 0$ pour aujourd'hui
 - ▶ $t = 1$ pour la date de réalisation de l'incertitude future
- ▶ et s **états de la nature**, indexés par i , possible en $t = 1$:
 - ▶ pouvant chacun survenir avec probabilité p_i
 - ▶ on supposera souvent $s = 2$: un "bon" et un "mauvais" scénario

⇒ on discrétise donc le futur, comme un univers d'événements possibles

- ▶ avant de généraliser au cas continu dans la suite du cours

Formalisation : actifs et paiements

- ▶ On suppose également qu'il existe n **actifs** indexés par j , et on note
 - ▶ $P_{0,j}$ le prix de l'actif j à la date 0
 - ▶ $A_{i,j}$ le paiement de l'actif j dans l'état de la nature i
- ▶ Par convention, on représente les actifs en colonne et les états en ligne
 - ▶ $P_0 = (P_{0,1}, \dots, P_{0,j}, \dots, P_{0,n})$ sera le vecteur de prix à la date 0
 - ▶ (A_j) le vecteur colonne des paiements de l'actif j , et
 - ▶ (A) la **matrice des paiements** avec s lignes (états) et n colonnes (actifs)
- ▶ On supposera souvent $n = 2$ avec un actif sans risque et un actif risqué
- ▶ Par exemple:

$$A_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} +5 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} +1 & +5 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}, P_0 = (1, 3)$$

Formalisation : stratégie d'investissement

- ▶ Une stratégie d'investissement à la date 0 correspond à un portefeuille:

$$T = (T_1, \dots, T_j, \dots, T_n)$$

où chaque T_j représente la quantité l'actif j achetées

→ $T_j < 0$ signifie que l'investisseur vend l'actif j

- ▶ Le prix de cette stratégie s'écrit alors (le ' représentant ici la transposée)

$$P_{0,T} = P_0.T'$$

- ▶ Et sa matrice de paiement à la date 1 :

$$\Pi_T = A.T'$$

- ▶ chaque ligne de la matrice Π_T représentera le paiement de T dans l'état i :

$$\Pi_{i,T} = T_1.A_{i,1} + \dots + T_j.A_{i,j} + \dots + T_n.A_{i,n}$$

Exemple de stratégie d'investissement

- ▶ Dans l'ex. précédent, vendre deux unités de l'actif sans risque 1 (l'obligation) et acheter une unité de l'actif risqué 2 (l'actif) correspond au portefeuille $T = (\dots, \dots)$
- ▶ Le prix de cette stratégie à la date 0 vaut ... €
- ▶ Et sa matrice de paiement s'écrit :

$$\Pi_T = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Exemple de stratégie d'investissement

- ▶ Dans l'ex. précédent, vendre deux unités de l'actif sans risque 1 (l'obligation) et acheter une unité de l'actif risqué 2 (l'actif) correspond au portefeuille $T = (-2, 1)$
- ▶ Le prix de cette stratégie à la date 0 vaut 1 € ($P_{0,T} = 1 * (-2) + 3 * 1$)
- ▶ Et sa matrice de paiement s'écrit :

$$\Pi_T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Remarque : Position long, short et vente à découvert

On parle de position :

- ▶ longue / "long" lorsqu'un investisseur achète un titre qu'il ne détient pas
 - ▶ pour profiter d'une hausse de son prix
- ▶ courte / "short" lorsqu'un investisseur vend un titre qu'il ne détient pas
 - ▶ pour profiter d'une baisse de son prix

Cette vente à découvert est réalisée via une opération **d'emprunt de titres**



Source : Forex.com

Définition formelle d'une opportunité d'arbitrage

Définition

Sur un marché (P_0, A) , on dira qu'il existe une opportunité d'arbitrage si il existe une stratégie T telle que :

- ▶ $P_{0,T} = 0$ (stratégie sans coût à $t = 0$)
- ▶ $\forall i \in \{1, \dots, s\}, \Pi_{i,T} \geq 0$ (paiement positif ou nul dans tous les états)
- ▶ $\exists i \in \{1, \dots, s\}, \Pi_{i,T} > 0$ (paiement strictement positif dans un des états)

(Par extension, aussi opportunité d'arbitrage si $P_{0,T} < 0$ et $\Pi_{i,T} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, s\}$)

Remarquez que les **probabilités** p_i ne jouent aucun rôle!

Recherche formelle d'opportunité d'arbitrage

Rechercher une opportunité d'arbitrage revient donc à chercher T

$$\begin{cases} P_{0,T} = \sum_j P_{0,j} T_j = 0 \\ \Pi_{i,T} = \sum_j A_{i,j} T_j \geq 0 \end{cases} \text{ avec au moins une inégalité stricte}$$

Exercice

Existe-t-il une opportunité d'arbitrage sur les marchés suivant :

► $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, P_0 = (1, 2); A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, P_0 = (1, 1, 2)$

► $A = \begin{pmatrix} 1+r & (1+u)S \\ 1+r & (1+d)S \end{pmatrix}, P_0 = (1, S)$

avec $S = 100, u = 5\%, d = 2\%, r = 2\%$. Et $r = 3\%$? $\forall u, d, r$?

Absence d'opportunité d'arbitrage

- ▶ Si il existe une opportunité d'arbitrage sur les marchés financiers...
- alors elle est rapidement saisie par les investisseurs (par ex les arbitragistes)
- ▶ et selon la loi de l'offre et de la demande, elle disparaît rapidement
 - ▶ la forte demande de vente (resp. d'achat) pour les positions short (resp. long) de la stratégie correspondante fait diminuer (resp. augmenter) leur prix
 - ▶ et donc augmenter $P_{0,T}$
- ⇒ On suppose qu'à l'équilibre sur les marchés financiers :

il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage

- ▶ Cette hypothèse à un corollaire important que va nous permettre d'**évaluer certains produits financiers**, notamment les dérivés.

La loi du prix unique (Law Of One Price, LOOP)

En l'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA), deux stratégies / portefeuilles T et $\tilde{T}$ donnant les mêmes paiements en $t = 1$: $\Pi_T = \Pi_{\tilde{T}}$ ($\Pi_{i,T} = \Pi_{i,\tilde{T}} \forall i$) doivent avoir le même prix en $t = 0$: $P_{0,T} = P_{0,\tilde{T}}$.

- ▶ Si ce n'était pas le cas, c'est-à-dire si $P_{0,T} > P_{0,\tilde{T}}$
- ▶ alors il y aurait une stratégie d'arbitrage, visant à vendre T et acheter $\tilde{T}$.
- ▶ En effet pour $\bar{T} = \tilde{T} - T$: $P_{0,\bar{T}} < 0$ et $\Pi_{i,\bar{T}} = 0 \forall i$
- ▶ Ainsi on pourra déterminer le prix d'un actif / d'une stratégie en l'AOA
- ▶ si on peut répliquer ses paiements ($\forall i$) avec des actifs dont on connaît le prix
- ▶ on parlera **d'évaluation par arbitrage**

Évaluation d'un contrat forward

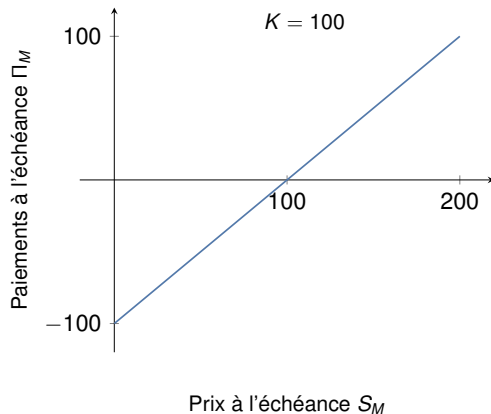
Définition

Un contrat **forward** est un engagement à terme à acheter/vendre un actif (sous-jacent) à une date future M pour un prix K fixé aujourd'hui, appelé prix de livraison. Il est négocié de gré-à-gré (OTC) entre deux contreparties.

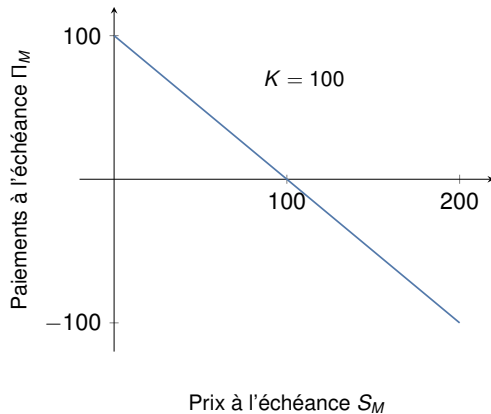
- ▶ À l'initiation ($t = 0$) : aucun flux de paiement entre contreparties (valeur nulle)
- ▶ À maturité ($t = M$) : la valeur (ou paiement, Π_M) du contrat est la différence entre :
le prix du sous-jacent (noté S_M) et le prix de livraison (K)
- ▶ Un Forward est conclu directement entre deux contreparties
 - ▶ contrairement aux Futures, standardisés et négociés sur un marché organisé
 - ▶ où les 2 parties prenantes sont liées indirectement via une contrepartie centrale
 - ▶ chambre de compensation
 - ▶ qui limite le risque de contrepartie via des appels de marge
 - ▶ suivant cours du sous-jacent

Paielements d'un forward

Long Forward: $\Pi_M = S_M - K$



Short Forward: $\Pi_M = K - S_M$



Évaluation d'un forward : la stratégie cash-and-carry

- ▶ Le prix initial du forward étant nul, il y aurait une opportunité d'arbitrage
 - ▶ si la vente d'un forward générerait un **paiement positif certain**
 - ▶ à un investisseur empruntant pour acheter le sous-jacent en $t = 0$
 - ▶ on parle de stratégie cash-and-carry
 - ▶ Autrement dit, si on arrive à générer une stratégie générant $S_M - K$ en M
 - ▶ quelque soit l'état de la nature
 - ▶ elle doit également avoir une valeur nulle en $t = 0$
 - ▶ Acheter le sous-jacent et emprunter $K/(1 + r)$ au taux r pour M périodes
 - ▶ génère $S_M - K$ en M quelque soit l'état de la nature
 - ▶ on doit alors avoir $K/(1 + r) - S_0 = 0$, où S_0 est le prix du sous jacent en $t = 0$
- ⇒ En l'AOA on doit avoir $K = (1 + r)S_0$ comme prix de livraison du forward

Stratégie cash-and-carry et absence d'opportunité d'arbitrage

On retrouve ce résultat en utilisant la formalisation précédente :

Considérons un marché constitué

1. d'une obligation de prix $P_{0,1} = 1$ avec $\Pi_{i,1} = 1 + r \forall i$
2. d'une action de prix $P_{0,2} = S_0$ avec $\Pi_{i,1} = S_i$
3. d'un forward de prix $P_{0,3} = 0$ avec $\Pi_{i,3} = S_i - K$

Le portefeuille $T = (-K/(1+r), 1, 0)$ donne $\Pi_{i,T} = S_i - K = \Pi_{i,3} \forall i$

$\Rightarrow$ En **AOA**, on doit avoir $P_{0,T} = P_{0,3} \Leftrightarrow -K/(1+r) + S_0 = 0 \Leftrightarrow K = S_0(1+r)$

Taux d'intérêt forward

- ▶ La même logique s'applique aux taux d'intérêt forward ou "taux à terme"
- ▶ qui permettent de fixer à l'avance le taux d'intérêt d'un **emprunt futur**
 - ▶ et de se couvrir face à une hausse des taux lorsqu'on planifie un investissement
- ▶ On note $f_{t,\tau}$ le taux d'intérêt forward auquel on pourra emprunter / prêter
 - ▶ à la date t (future) pour une échéance / un remboursement en τ ($>t$)
 - ▶ par convention, on exprimera $f_{t,\tau}$ en taux annuel
- ▶ D'après la loi du prix unique, si on peut reproduire les paiements du forward
- ▶ par des emprunts / prêts **spot**, au taux $r_{0,\tau}$ auquel on peut emprunter / prêter
 - ▶ aujourd'hui ($t = 0$) pour une échéance / un remboursement en τ
 - ▶ $r_{0,\tau}$ sera également exprimé en taux annuel
- ▶ on obtient une relation entre taux spot et taux forward à respecter en AOA

Taux d'intérêt forward et absence d'opportunité d'arbitrage

Considérons par exemple

- ▶ le cas d'un emprunt /prêt dans un an pour une durée d'un an, c'est-à-dire $f_{1,2}$
 - ▶ un investisseur peut emprunter 1€ sur 2 ans au taux annuel $r_{0,2}$ et
 - ▶ le prêter d'abord sur an au taux $r_{0,1}$ puis (le résultat) au taux forward $f_{1,2}$
- ▶ en l'AOA, cette stratégie sans coût ne doit **pas être profitable**, d'où :

$$-(1 + r_{0,2})^2 + (1 + r_{0,1})(1 + f_{1,2}) = 0 \Leftrightarrow f_{1,2} = \frac{(1+r_{0,2})^2}{1+r_{0,1}} - 1$$

En reproduisant la même méthodologie avec $r_{0,3}$, on obtient:

$$(1 + r_{0,3})^3 = (1 + r_{0,2})^2(1 + f_{2,3}) = (1 + r_{0,1})(1 + f_{1,2})(1 + f_{2,3})$$

et dans le cas général :

$$(1 + r_{0,n})^n = (1 + r_{0,n-1})^{n-1}(1 + f_{n,n-1})$$

$$(1 + r_{0,n})^n = (1 + r_{0,1})(1 + f_{1,2})...(1 + f_{n-2,n-1})(1 + f_{n,n-1})$$

permettant de **retrouver les taux forward** à partir des taux spot (et vice versa)

Engagement conditionnel et options

- ▶ Forward : engagement entre vendeur et acheteur **ferme et symétrique**
 - ▶ l'acheteur a l'obligation de recevoir l'actif sous-jacent et de payer le prix convenu
 - ▶ le vendeur a l'obligation de livrer l'actif sous-jacent et de recevoir le prix convenu
- ▶ Options : engagement **conditionnel et asymétrique**
 - ▶ l'acheteur de l'option a **le droit** mais pas l'obligation d'exercer l'option, i.e.
 - ▶ d'acheter le sous-jacent au prix convenu dans le cas d'un call (option d'achat)
 - ▶ de vendre le sous-jacent au prix convenu dans le cas d'un put (option de vente)
 - ▶ le vendeur de l'option a **l'obligation** de répondre à l'exercice de l'option, i.e.
 - ▶ de vendre le sous-jacent au prix convenu dans le cas d'un call
 - ▶ d'acheter le sous-jacent au prix convenu dans le cas d'un put
- ▶ Implication de l'asymétrie : une option a un **coût initial** que l'acheteur doit payer au vendeur en $t = 0$: la prime

Caractéristiques d'une option

Un option est caractérisée par

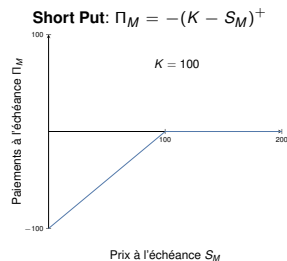
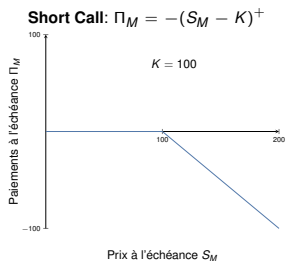
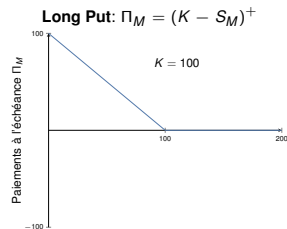
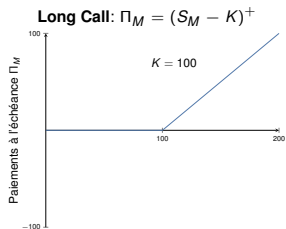
- ▶ son type : option d'achat (call) ou option de vente (put) principalement
- ▶ son **sous-jacent** (action, devise, matière première, etc.)
- ▶ sa **maturité** M , c'est-à-dire son échéance
- ▶ son **strike**, c'est-à-dire son prix convenu d'exercice, noté K
- ▶ son type d'**exercice**, déterminant les droits de l'acheteur
 - ▶ *Européenne* : l'acheteur peut exercer uniquement à la date d'échéance
 - ▶ *Américaine* : il peut exercer à tout moment jusqu'à la date d'échéance
 - ▶ *Bermudienne* : il peut exercer à plusieurs dates fixées jusqu'à échéance

Paielements d'une option européenne (1)

- ▶ Dans le cas d'une option d'achat, i.e. d'un call, **à échéance**
 - i. si le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice : $S_M < K$
l'acheteur n'a pas intérêt à exercer $\rightarrow \Pi_M = 0$
 - ii. si le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice : $S_M > K$
l'acheteur a intérêt à exercer et $\Pi_M = S_M - K$ $\Rightarrow \Pi_M = \max(S_M - K; 0) = (S_M - K)^+$ pour l'acheteur

- ▶ Dans le cas d'une option de vente, i.e. d'un put, **à échéance**
 - i. si le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice : $S_M > K$
l'acheteur n'a pas intérêt à exercer $\rightarrow \Pi_M = 0$
 - ii. si le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice : $S_M < K$
l'acheteur a intérêt à exercer et $\Pi_M = K - S_M$ $\Rightarrow \Pi_M = \max(K - S_M; 0) = (K - S_M)^+$ pour l'acheteur

Paielements d'une option européenne (2)



Parité Put-Call

On remarque qu'en combinant la vente d'un put et l'achat d'un call

- ▶ de même échéance et de même prix d'exercice (sur le même sous-jacent)

→ on obtient un paiement $S_M - K$ (le même qu'un forward)

⇒ Un portefeuille constitué d'une position short sur un put et long sur un call

- ▶ donne **dans tous les états de la nature** le même paiement

- ▶ qu'un portefeuille constitué du sous-jacent et d'un emprunt de $K/(1 + r)$

⇒ En AOA, les deux portefeuilles doivent avoir le même prix en $t = 0$

En notant

- ▶ S_0 le prix du sous-jacent en $t = 0$ et

- ▶ C_0 et V_0 les prix respectifs du call et du put (V pour option de vente)

on obtient alors : $C_0 - V_0 = S_0 - K/(1 + r)$. On parle de **parité Put-Call**

Exercices

Forward avec coût de stockage

On considère un contrat forward à un an sur une tonne de blé. Le cours du blé est actuellement de 200€/t et le taux d'intérêt à 5% annuel. On considère que le coût de stockage d'une tonne de blé pour un an est de 10€ payable d'avance. Quel doit être le prix de livraison de ce forward en l'AOA, en prenant en compte coût de stockage?

Parité put-call avec dividendes

On considère des options de maturité 1 an sur une action dont on sait qu'elle versera sur l'année des dividendes de valeur actualisée 1€. Comment la prise en compte de ces dividendes modifie-t-elle la parité put-call?

Évaluation par arbitrage et portefeuille de réplication

Portefeuille de réplication

Rappel

En l'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA), deux stratégies / portefeuilles T et $\tilde{T}$ donnant les mêmes paiements en $t = 1$: $\Pi_T = \Pi_{\tilde{T}}$ ($\Pi_{i,T} = \Pi_{i,\tilde{T}} \forall i$) doivent avoir le même prix en $t = 0$: $P_{0,T} = P_{0,\tilde{T}}$.

- ⇒ En AOA, on peut évaluer un produit financier (même complexe) si on peut **répliquer** ses paiements dans tous les états de la nature avec un portefeuille d'actifs dont on connaît le prix actuel
- ▶ on parle de portefeuille de réplication
 - ▶ Ne nécessite de connaître ni les proba., ni le comportement des investisseurs.
 - ▶ Mais nécessite l'existence préalable de suffisamment d'actifs.

Portefeuille de réplcation – Formalisation

Nous pourrons **valoriser** un actif Z (c'est-à-dire déterminer son prix en $t = 0$) si :

1. nous connaissons ses paiements dans tous les états de la nature à la date 1

$$A'_Z = (A_{1,Z}, \dots, A_{i,Z}, \dots, A_{s,Z})$$

2. et pouvons les répliquer avec un portefeuille T d'actifs existant:

$$\exists T : \forall i \sum_{j=1}^n T_j \cdot A_{i,j} (= \Pi_{i,T}) = A_{i,Z}$$

On aura alors $P_{0,Z} = P_{0,T} = \sum_{j=1}^n T_j \cdot P_{0,j}$

Portefeuille de réplcation – Exemple (1)

On considère un marché constitué de

- ▶ une obligation sans risque R , de prix $P_{0,R} = 1$ donnant $A_{i,R} = 1,05 \forall i$
- ▶ un actif risqué X valant $P_{0,X} = 100\text{€}$ et dont les paiements à la date 1 seront
 - ▶ 90€ si la croissance est inférieure à 3%
 - ▶ 110€ si la croissance est supérieure à 3%

(on voit ici un exemple de discrétisation des états du monde)

Une entreprise Z aimerait s'introduire en Bourse

- ▶ Les analystes prévoient que Z vaudra en $t = 1$
 - ▶ 350M€ si la croissance est inférieure à 3%
 - ▶ 500M€ si la croissance est supérieure à 3%
- ▶ Elle veut émettre 10 millions de titres. Quel devrait être **le prix d'émission en l'absence d'opportunité d'arbitrage?**

Portefeuille de réplcation – Exemple (2)

On a $A = \begin{pmatrix} 1,05 & 90 \\ 1,05 & 110 \end{pmatrix}$ et $A_Z = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix}$

On cherche donc un portefeuille T composé de (R, X) tel que

$$\begin{cases} 1,05.T_R + 90.T_X = 35 \\ 1,05.T_R + 110.T_X = 50 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} T_X = 15/20 = 0,75 \\ T_R = (35 - 90 * 0,75)/(1,05) = -30,952 \end{cases}$$

(la première éq. s'obtient en faisant la différence des 2 éq. du système précédent)

En AOA, les prix en 0 de T et Z doivent être égaux. Le **prix d'émission** sera donc

$$P_{0,Z} = T_R.P_{0,R} + T_X.P_{0,X} = -30,952 * 1 + 0,75 * 100 = 44,048\text{€}$$

Portefeuille de réplcation et marchés complets

- ▶ Il n'est pas toujours possible d'évaluer un actif via cette méthode
- ▶ car elle nécessite de pouvoir répliquer les paiements dans tous les états
- ▶ et donc requiert l'existence d'actifs pour le faire.

- ▶ Si on suppose 3 états, il n'est par exemple pas possible de répliquer
 - ▶ un actif Z donnant 0 dans l'état 1 et 1 dans les états 2 et 3, avec
 - ▶ un actif X donnant 0 dans l'état 2 et 1 dans les états 1 et 3
 - ▶ un actif Y donnant 1 dans l'état 2 et 0 dans les états 1 et 3

- ▶ Toutefois, on pourra toujours trouver un portefeuille de réplcation si le marché $A = (A_{i,j})$ est **complet**, i.e.
 - ▶ si on peut générer n'importe quel vecteur de paiement avec les actifs existants :

$$\forall A_Z \in \mathbb{R}^s, \exists T : A \cdot T' = A_Z$$

Marchés complets et actifs d'Arrow-Debreu

- ▶ Un marché complet nécessite au moins autant d'actifs que d'états du monde :

$$s \leq n$$

- ▶ En particulier un marché sera complet si **pour chaque état du monde** il existe un actifs donnant 1€ dans cet état et 0 dans tous les autres
 - ▶ on parlera d'actif d'Arrow-Debreu
- ▶ Si on note $P_{0,i}$ le prix de ces actifs, on aura alors, $\forall$ actif Z de paiements A_Z

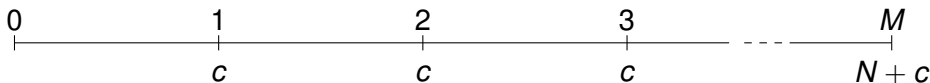
$$P_{0,Z} = \sum_{i=1}^s P_{0,i} A_{i,Z}$$

Arbitrage et obligations

- ▶ Si il n'existe pas sur les marchés réels d'actifs d'Arrow-Debreu
 - ▶ des actifs donnant 1€ dans un état de la nature uniquement
- ▶ il existe des actifs versant 1€ à une date uniquement :
les **obligations zéro-coupon**
 - un seul paiement à échéance
 - sans versement intermédiaire (appelés coupon)
- ▶ L'hypothèse d'AOA et la loi du prix unique permet
 1. d'évaluer n'importe quelle obligation couponnée
 2. de déduire la courbe des tauxà partir du prix des obligations zéro-coupon.

Coupons et réplication

- ▶ Toute obligation de valeur faciale N et d'échéance M
 - ▶ versant des coupons annuels constant c



- ▶ peut être **répliquée** par des obligations zéro-coupon (du même émetteur)
 - ▶ c obligations zéro-coupon d'échéance 1 à $M - 1$
 - ▶ $N + c$ obligations zéro-coupon d'échéance M

⇒ En notant $B_{0,t}$ le prix de l'obligation zéro-coupon d'échéance t ,
en l'AOA le prix de l'obligation présentée ci-dessous doit donc être égale à

$$\sum_{t=1}^M c.B_{0,t} + N.B_{0,M}$$

Obligation sans risque et taux d'intérêt

- ▶ Dans le cas des obligations **sans risque**, pour lesquelles on est certain
 - ▶ de recevoir le nominal à échéance (quelque soit l'état de la nature)
 - ▶ comme supposé pour les obligations d'états notés AAA
- ▶ l'hypothèse d'AOA permet de relier prix du zéro-coupon au taux d'intérêt.
- ▶ Il y aurait en effet une opportunité d'arbitrage si il était profitable
 - ▶ d'emprunter (resp. prêter) au taux annuel $r_{0,t}$, pour
 - ▶ acheter (resp. vendre) une zéro-coupon sans risque d'échéance t au prix $B_{0,t}$
- ▶ En l'absence d'opportunité d'arbitrage on doit donc avoir

$$(1 + r_{0,t})^t B_{0,t} = 1 \Leftrightarrow B_{0,t} = \frac{1}{(1 + r_{0,t})^t}$$

Obligation sans risque et taux d'intérêt - Exercice

Le prix d'une obligation sans risque de maturité 10 ans versant un taux de coupon annuel de 8% est de 90€; alors que celui d'une obligation sans risque de maturité 10 ans et de coupon 4% est de 80€. En conclure le taux d'intérêt annuel sans risque à 10 ans.

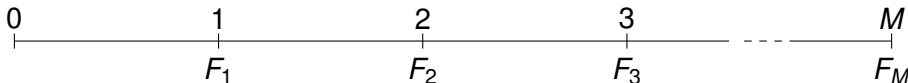
Obligation sans risque et taux d'intérêt - Exercice

Le prix d'une obligation sans risque de maturité 10 ans versant un taux de coupon annuel de 8% est de 0.9€; alors que celui d'une obligation sans risque de maturité 10 ans et de coupon 4% est de 0.8€. En conclure le taux d'intérêt annuel sans risque à 10 ans.

$$\begin{aligned}\frac{8}{1+r_{0,1}} + \frac{8}{(1+r_{0,2})^2} + \dots + \frac{8}{(1+r_{0,9})^9} + \frac{108}{(1+r_{0,10})^{10}} &= 90 \\ \frac{4}{1+r_{0,1}} + \frac{4}{(1+r_{0,2})^2} + \dots + \frac{4}{(1+r_{0,9})^9} + \frac{104}{(1+r_{0,10})^{10}} &= 80 \\ \Rightarrow \frac{100}{(1+r_{0,10})^{10}} = 160 - 90 \Rightarrow r_{0,10} &= \left(\frac{10}{7}\right)^{1/10} - 1 = 3,63\%\end{aligned}$$

Absence d'opportunité d'arbitrage en VAN

- ▶ En combinant les deux derniers résultats, on peut valoriser
- ▶ n'importe quel actif A générant des flux futurs **certains** $\{F_t\}_{t=1}^M$



1. on peut répliquer ses flux par des obligations zéro-coupon (sans risque)

$$P_{0,A} = \sum_{t=1}^M F_t \cdot B_{0,t}$$

2. on obtient en termes de taux d'intérêt

$$P_{0,A} = \sum_{t=1}^M \frac{F_t}{(1+r_{0,t})^t}$$

⇒ On retrouve ici la notion de VAN (et les DCF) avec le taux sans risque

- ▶ si les flux ne sont pas certains, le prix des obligations / le taux s'ajuste (WACC)

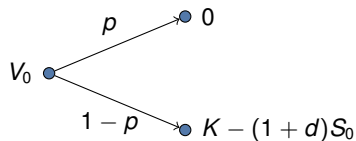
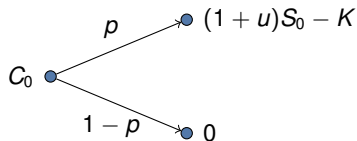
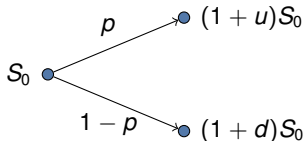
Application à l'évaluation d'options

Hypothèses du modèle binomial

- ▶ La méthode d'évaluation par arbitrage (via le portefeuille de réplication)
- ▶ va nous permettre d'évaluer / "pricer" les options d'achat et de vente (call/put)
- ▶ lorsqu'on fait des hypothèses sur l'évolution du prix du sous-jacent
 - ▶ la parité put-call est obtenue quelque soit cette évolution
- ▶ Dans le modèle le plus simple (modèle binomial) on supposera que **à chaque période**, la valeur du sous-jacent peut
 - ▶ avec proba p , augmenter de $u\%$ (état "up"): $S_{t+1} = (1 + u)S_t$
 - ▶ avec proba $(1 - p)$, augmenter de $d\%$ ($d < u$, état "down"): $S_{t+1} = (1 + d)S_t$
- ▶ On supposera également qu'il existe un actif **sans risque**
 - ▶ donnant un rendement r quelque soit l'état de la nature
- ▶ qu'il n'y a pas d'OA entre cet actif et le sous-jacent : $d < r < u$ (cf. ex. p. 19)
- ▶ et que le sous-jacent ne verse pas de dividendes.

Le modèle à une période

- ▶ On considère pour commencer un modèle à une seule période
 - ▶ deux dates : $t = 0$ et $t = 1$; des options de maturité 1
 - ▶ et un prix d'exercice $(1 + d)S_0 < K < (1 + u)S_0$
 - ▶ sinon $C_0 = 0$ ou $V_0 = 0$ (et $V_0 = K/(1 + r) - S_0$ ou $C_0 = S_0 - K/(1 + r)$)



Matrice de paiements et portefeuille de réplication

- ▶ On a donc : $A = \begin{pmatrix} 1+r & (1+u)S_0 \\ 1+r & (1+d)S_0 \end{pmatrix}$, $P_0 = (1, S_0)$ et
- ▶ on cherche le prix d'un produit dérivé donnant $\begin{pmatrix} D_u \\ D_d \end{pmatrix}$
- ▶ avec, si $(1+d)S_0 < K < (1+u)S_0$
 - ▶ $D_u = (1+u)S_0 - K$, $D_d = 0$ pour un call (on notera C_u et C_d)
 - ▶ $D_u = 0$ et $D_d = K - (1+d)S_0$ pour un put (on notera V_u et V_d)
- ▶ Pour cela, on cherche T_S et T_R tel que :

$$\begin{cases} = \\ = \end{cases}$$

Matrice de paiements et portefeuille de réplication

- ▶ On a donc : $A = \begin{pmatrix} 1+r & (1+u)S_0 \\ 1+r & (1+d)S_0 \end{pmatrix}$, $P_0 = (1, S_0)$ et
- ▶ on cherche le prix d'un produit dérivé donnant $\begin{pmatrix} D_u \\ D_d \end{pmatrix}$
- ▶ avec, si $(1+d)S_0 < K < (1+u)S_0$
 - ▶ $D_u = (1+u)S_0 - K$, $D_d = 0$ pour un call (on notera C_u et C_d)
 - ▶ $D_u = 0$ et $D_d = K - (1+d)S_0$ pour un put (on notera V_u et V_d)
- ▶ Pour cela, on cherche T_S et T_R tel que :

$$\begin{cases} (1+r)T_R + (1+u)S_0T_S = D_u \\ (1+r)T_R + (1+d)S_0T_S = D_d \end{cases}$$

Prix des produits dérivés

On trouve alors

$$\begin{cases} T_S &= \frac{D_u - D_d}{(u-d)S_0} \\ T_R &= \frac{(1+u)D_d - (1+d)D_u}{(1+r)(u-d)} \end{cases}$$

(la première eq. s'obtient en faisant la différence des 2 eq. du système précédent)

⇒ En l'**absence d'opportunité d'arbitrage**, le prix du dérivé s'écrit:

$$\begin{aligned} D_0 &= T_S \cdot S_0 + T_R \cdot 1 \\ &= D_u \left(\frac{1}{u-d} - \frac{1+d}{(1+r)(u-d)} \right) + D_d \left(\frac{(1+u)}{(1+r)(u-d)} - \frac{1}{(u-d)} \right) \\ &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{r-d}{u-d} D_u + \frac{u-r}{u-d} D_d \right) \end{aligned}$$

Évaluation risque neutre

- ▶ Si on note $q \equiv (r - d)/(u - d)$, on remarque que $(u - r)/(u - d) = 1 - q$
→ le prix du dérivé s'écrit alors :

$$D_0 = \frac{1}{1 + r}(q.D_u + (1 - q).D_d)$$

avec $q \in \{0, 1\}$ lorsque $d < r < u$ (AOA)

- ▶ et correspond donc à la **valeur espérée actualisée** de ses paiements
 - ▶ sous la distribution de probabilités virtuelle $((u, q); (d, (1 - q)))$
(différente de la distribution de probabilités "physique" $((u, p); (d, (1 - p)))$)
- On parlera de distribution de probabilités **risque-neutre**
 - ▶ sous laquelle la valeur d'un actif est égale à l' $\mathbb{E}$ des paiements futurs actualisée
"comme si" les investisseurs étaient neutre au risque ($\mathbb{E}u(x) = u(\mathbb{E}(x))$)

Évaluation risque neutre et probabilité physique

- ▶ La valeur du dérivé ne dépend donc pas directement la distribution de proba des **états de la nature**!
- ▶ Les états de la nature définissant la valeur future du sous-jacent (u et d), il est par contre vraisemblable que leur distribution influence son prix en S_0
 - ▶ supposé ici donné
- ▶ qui impacte généralement les paiements D_u et D_d des produits dérivés
 - ▶ comme c'est notamment le cas pour les options

Le cas d'un call

- Dans le cas où $(1+d)S_0 < K < (1+u)S_0$, on a $C_d = 0$ et $C_u = (1+u)S_0 - K$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{(r-d)}{(1+r)(u-d)}((1+u)S_0 - K)$$

- Et, le portefeuille de réplication sera :

$$\begin{cases} T_S &= \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0} &= \frac{1+u}{u-d} - \frac{K}{(u-d)S_0} \\ T_R &= \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(1+r)(u-d)} &= \frac{-(1+d)((1+u)S_0 - K)}{(1+r)(u-d)} \end{cases}$$

Il consiste à :

1. acheter le sous-jacent en quantité $\frac{1+u}{u-d} - \frac{K}{(u-d)S_0} \equiv \Delta_{call}$
► on parlera de ratio de couverture (ou de delta de l'option)
2. vendre l'obligation (emprunter) pour un montant $\frac{-(1+d)((1+u)S_0 - K)}{(1+r)(u-d)}$

Exercices

Delta d'un put et comparaison

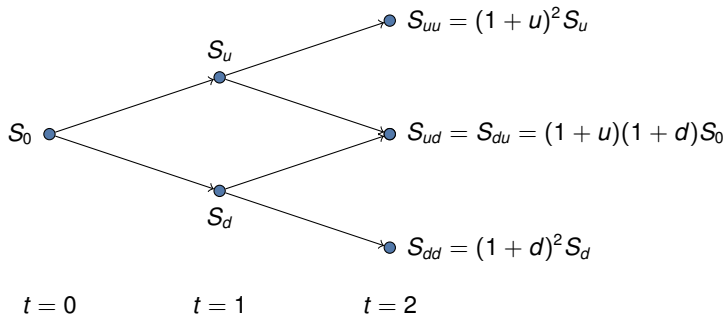
Calculer le ratio de couverture pour l'achat d'une option de vente Δ_{put} .
Comparer au ratio de couverture pour l'achat d'une option d'achat Δ_{call} .

Stratégies de couverture

On considère un producteur de blé souhaitant se couvrir contre une baisse du prix du blé à 1 an. Le cours du blé est actuellement de 200€/tonne, le taux d'intérêt à 1 an est de 5%. On néglige le coût de stockage (sinon il doit être pris en compte dans le pricing de l'option). On suppose que le prix du blé peut (avec proba $p = 0,1$) s'apprécier de 20% ou (avec proba $0,9$) se déprécier de 10% sur l'année. Comparer une stratégie de couverture basée sur un forward et une stratégie de couverture basée sur une option "at the money" ($K = 200\text{€/tonne}$). On prendra soin de définir la stratégie (achat/vente et type d'option) et de comparer les P&L actualisés à échéance.

Le modèle binomial à deux périodes

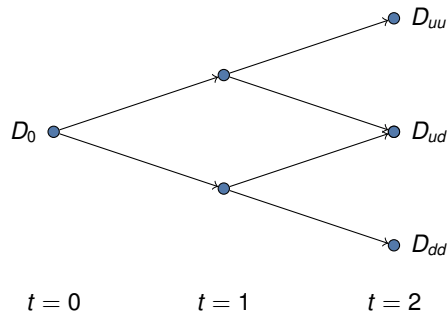
- Considérons maintenant trois dates $t = 0, 1, 2$ et des dérivés de maturité 2
- À **chaque période** t la valeur du sous-jacent S_t peut
 - s'apprécier de u : $S_t = (1 + u)S_{t-1}$
 - s'apprécier de d ($< u$ et potentiellement < 0) : $S_t = (1 + d)S_{t-1}$



avec $S_u = (1 + u)S_0$ et $S_d = (1 + d)S_0$

Réplication dynamique

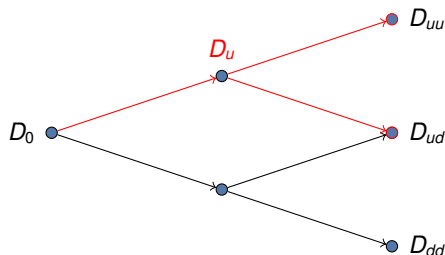
- Pour un produit dérivé **européen** de maturité $t = 2$, donnant D_{uu} , D_{ud} et D_{dd}
 - par exemple dans le cas d'un call $D_{uu} = \max(0, (1 + u)^2 S_0 - K)$



- on sait, d'après le modèle à une période, répliquer les paiements de période 2
- **conditionnellement** à l'état en $t = 1$ (u ou d)

Réplication dynamique : période 2 (si u)

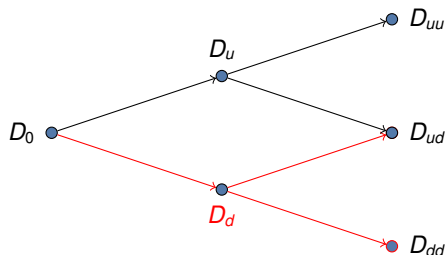
- ▶ Par exemple si l'état u s'est réalisé en $t = 1$ (en utilisant le slide 53)



- ▶ on peut **répliquer** D_{uu} et D_{ud} avec un portefeuille constitué de :
 $\frac{D_{uu}-D_{ud}}{(u-d)S_u}$ sous-jacent et $\frac{(1+u)D_{ud}-(1+d)D_{uu}}{(1+r)(u-d)}$ actif sans risque de rendement r
- ▶ dont le prix est $D_u = \frac{1}{1+r}(q.D_{uu} + (1-q).D_{ud})$ avec $q = (r-d)/(u-d)$

Réplication dynamique : période 2 (si d)

- ▶ De même si l'état d s'est réalisé en $t = 1$ (en utilisant le slide 53)



- ▶ on peut **répliquer** D_{ud} et D_{dd} avec un portefeuille constitué de :
 $\frac{D_{ud}-D_{dd}}{(u-d)S_d}$ sous-jacent et $\frac{(1+u)D_{dd}-(1+d)D_{ud}}{(1+r)(u-d)}$ actif sans risque de rendement r
- ▶ dont le prix est $D_d = \frac{1}{1+r}(q.D_{ud} + (1-q).D_{dd})$ avec $q = (r-d)/(u-d)$

Réplication dynamique : période 1

- ▶ Ainsi, si on peut construire en $t = 0$ un portefeuille générant
 - ▶ D_u en $t = 1$ si u se réalise
 - ▶ D_d en $t = 1$ si d se réalise
- ▶ on pourra **re-balancer** ce portefeuille, en $t = 1$ pour répliquer
 - ▶ $(D_{uu}; D_{ud})$ si u se réalise
 - ▶ $(D_{ud}; D_{dd})$ si d se réalise
- ▶ Or, on sait construire ce portefeuille, en utilisant **une nouvelle fois** le modèle à une période (et le slide 53)
- ▶ Il vise à détenir : $\frac{D_u - D_d}{(u-d)S_0}$ sous-jacent et $\frac{(1+u)D_d - (1+d)D_u}{(1+r)(u-d)}$ actif sans risque en supposant que le taux sans risque est le même entre les 2 périodes

Réplication dynamique et évaluation risque neutre

- Ce portefeuille valant

$$D_0 = \frac{1}{1+r}(q.D_u + (1-q).D_d)$$

avec $q = (r - d)/(u - d)$ d'après le modèle à une période

- on obtient, en utilisant les valeurs de D_u et D_d calculées plus haut :

$$D_0 = \frac{1}{(1+r)^2} \left(q^2.D_{uu} + 2(1-q)q.D_{ud} + (1-q)^2.D_{dd} \right) = \frac{1}{(1+r)^2} \mathbb{E}_q(D_2)$$

Le prix du produit dérivé est égale à la **valeur espérée** actualisée de ses paiements, sous la distribution de **probabilité risque-neutre**.

Exercices

Réplication dynamique et taux forward

Déterminez la valeur d'un dérivé européen de maturité 2 lorsque $r_{0,2} \neq r_{0,1}$.

Option de vente et re-balancement

Considérons un put européen à deux ans de prix d'exercice 52€ sur une action cotée actuellement 50€. La durée de vie de l'option est divisée en deux périodes d'un an chacune et, à chaque période, le cours de l'action peut augmenter de 20% ou baisser de 20%. Le taux annuel sans risque est supposé constant et égal à 5%.

1. Calculer la valeur de cette option.
2. Définir la stratégie de réplication (de couverture du vendeur).
3. Vérifier que le re-balancement du portefeuille se fait à coût nul.

Les options américaines sur deux périodes

- ▶ Dans le cas des options américaines, le détenteur à la possibilité d'exercer l'option aux **dates intermédiaires** (ici $t = 1$).
 - ▶ À échéance, la valeur de ces options est la même que celle des européennes puisqu'il n'y a plus de différence entre les deux types : D_{uu}, D_{ud}, D_{dd}
 - ▶ Par contre, aux dates intermédiaires, le détenteur d'une option américaine :
 1. peut exercer l'option et obtenir un paiement dépendant de l'état, noté Π_i
 2. ou la conserver et attendre l'échéance
- ⇒ en $t = 1$, dans l'état i , il choisira d'exercer si $\Pi_i > D_i$, $i = \{u, d\}$
- ▶ avec $D_i = 1/(1+r) \cdot (q \cdot D_{iu} + (1-q) \cdot D_{id})$ d'après le raisonnement précédent
 - ▶ car en exerçant il peut alors générer plus que D_{iu} et D_{id} , en iu et id

La valeur d'une option américaine sur deux périodes

- ▶ On obtient donc que la valeur d'une option américaine dans l'état i à $t = 1$ est

$$D_i^a = \max(\Pi_i, D_i) \geq D_i, \quad i = \{u, d\}$$

- ▶ et donc que sa valeur en $t = 0$ est :

$$D_0^a = \frac{1}{1+r}(q \cdot D_u^a + (1-q)D_d^a) \geq D_0$$

Du fait de la possibilité d'exercer aux dates intermédiaires, une option américaine vaut toujours au moins autant qu'une option européenne (de même prix d'exercice).

Le cas du call américain

Pour un call (une option d'achat) américain(e), on a :

- ▶ $C_{uu} = (S_{uu} - K)^+$, $C_{dd} = (S_{dd} - K)^+$, $C_{ud} = (S_{ud} - K)^+$
- ▶ $C_u = \frac{1}{1+r}(q.C_{uu} + (1-q).C_{ud})$ et $C_d = \frac{1}{1+r}(q.C_{ud} + (1-q).C_{dd})$
- ▶ $\Pi_u = (S_u - K)^+$ et $\Pi_d = (S_d - K)^+$

En $t = 1$, dans l'état i , le détenteur d'un call américain, compare donc

- ▶ $(S_i - K)^+$ à $\frac{1}{1+r}(q.(S_{iu} - K)^+ + (1-q).(S_{id} - K)^+)$
- ▶ c'est à dire $(S_1 - K)^+$ à $\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_q((S_2 - K)^+ | S_1)$

Or la fonction $f : x \rightarrow (x - k)^+$ étant **convexe**, l'inégalité de Jensen donne

- ▶ $\mathbb{E}_q((S_t - K)^+ | S_{t-1}) > (\mathbb{E}_q(S_t | S_{t-1}) - K)^+$

La valeur d'un call américain

- ▶ On a donc pour $i = \{u, d\}$: $C_i > \frac{1}{1+r}(\mathbb{E}_q(S_2 \mid S_1 = S_i) - K)^+$
 - ▶ Or $\mathbb{E}_q(S_2 \mid S_1 = S_i) = q(1+u)S_i + (1-q)(1+d)S_i = (1+r)S_i$
 - ▶ en utilisant $q = (r-d)/(u-d)$
- ⇒ On a donc pour $i = u, d$: $C_i > (S_i - K)^+ = \Pi_i$
- et le détenteur d'un call américain n'a **jamais intérêt** à exercer en $t = 1$
- ▶ si le sous-jacent ne verse pas de dividendes (sinon $\mathbb{E}_q(S_2 \mid S_i) \neq (1+r)S_i$)

Lorsque le sous-jacent ne verse pas de dividende, call américains et call européens ont le même prix.

Le modèle binomial à M périodes

- ▶ Le principe de réplication dynamique s'étend directement à $M > 2$ périodes.
- Dans le cas d'un dérivé **européen** de maturité M et de paiements (D_M)

$$D_0 = \frac{1}{(1+r)^M} \mathbb{E}_q(D_M)$$

lorsque le taux d'intérêt sans risque est constant.

- ▶ Ainsi pour les options européennes, on obtient :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^M} \mathbb{E}((S_M - K)^+) = \frac{1}{(1+r)^M} \sum_{k=0}^n \binom{M}{k} q^k (1-q)^{M-k} ((1+u)^k (1+d)^{M-k} S_0 - K)^+$$

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^M} \mathbb{E}((K - S_M)^+) = \frac{1}{(1+r)^M} \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} q^k (1-q)^{M-k} (K - (1+u)^k (1+d)^{M-k} S_0)^+$$

- ▶ où $\binom{M}{k} = \frac{M!}{k!(M-k)!}$ est le nb de **trajectoires** avec k fois u et $(M-k)$ fois d .

La valeur d'une option américaine sur M périodes

- ▶ Dans le cas des options américaines, on raisonne par induction **à rebours**
- ▶ en partant des états terminaux, notés ω
 - ▶ qui sont des suites de longueur M de u et de d
- ▶ Le raisonnement précédent sur l'exercice du call vaut à chaque période
→ call américain = call européen si le sous-jacent ne verse pas de dividende
- ▶ Dans le cas général, on obtient D_0 en appliquant, à partir de $t = M - 1$:

$$D_{[\omega]_t}^a = \max \left(\Pi_{[\omega]_t}, \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_q \left(D_{[\omega]_{t+1}}^a \mid S_t = S_{[\omega]_t} \right) \right)$$

- ▶ où $[\omega]_t$ est le préfixe de longueur t de l'état ω ,
 $\Pi_{[\omega]_t}$ est le paiement de l'exercice au temps t dans l'état $[\omega]_t$
et $D_{\omega}^a = D_{\omega}$ (à l'état terminal).

Vers un modèle en temps continu : Exercice de l'option

- ▶ On peut simplifier l'expression de la valeur des options européennes C_0 et V_0
- ▶ en remarquant que la valeur du sous-jacent à échéance : S_M
 - ▶ notamment sa position par rapport au prix d'exercice : K
 - ▶ et donc l'exercice ou non de l'option à maturité
- ▶ ne dépend que du **nombre total** de u (et de d) sur la trajectoire.

→ En notant η le nombre minimum de u pour atteindre K :

$$\eta = \min_k \{k : (1+u)^k (1+d)^{M-k} S_0 > K\}$$

- ▶ le détenteur du call exercera si le nombre total de $u > \eta$
- ▶ le détenteur du put exercera si le nombre total de $u < \eta$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^M} \sum_{k=\eta}^M \binom{M}{k} q^k (1-q)^{M-k} ((1+u)^k (1+d)^{M-k} S_0 - K)$$

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^M} \sum_{k=0}^{\eta} \binom{M}{k} q^k (1-q)^{M-k} (K - (1+u)^k (1+d)^{M-k} S_0)$$

[en utilisant η , on n'a plus besoin du max, c'est-à-dire du $^+$]

Vers un modèle en temps continu : La formule binomiale

- On peut alors réécrire la formule du call comme :

$$C_0 = S_0 \sum_{k=\eta}^M \binom{M}{k} \left(\frac{q(1+u)}{1+r} \right)^k \left(\frac{(1-q)(1+d)}{1+r} \right)^{M-k} - \frac{K}{(1+r)^M} \sum_{k=\eta}^M \binom{M}{k} q^k (1-q)^{M-k}$$

- en remarquant que $s \equiv \frac{q(1+u)}{1+r}$ et une proba et que $\frac{(1-q)(1+d)}{1+r} = 1 - s$
- et en notant $B_\pi(\eta)$ la proba. qu'une v.a. **Binomiale** de paramètres π enregistre au moins η succès parmi M tirages, on obtient :

$$C_0 = S_0 \cdot B_s(\eta) - \frac{K}{(1+r)^M} \cdot B_q(\eta)$$

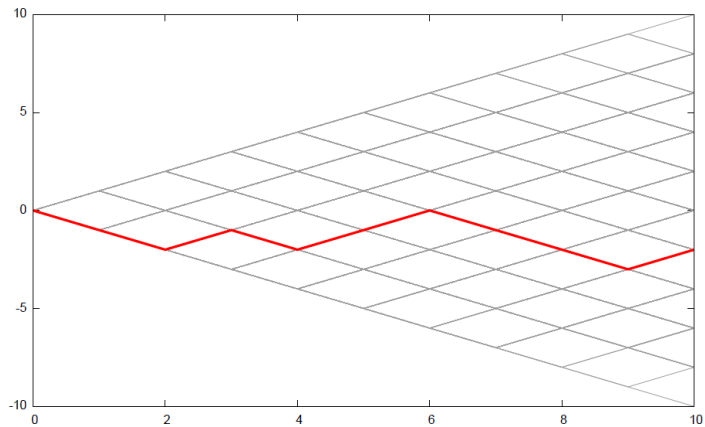
(et un résultat similaire pour le put)

Vers un modèle en temps continu : passage à la limite

- ▶ Ce résultat est l'**analogue en temps discret** de la formule de Black-Scholes
 - ▶ que vous découvrirez dans la suite du cours
- ▶ obtenue en temps continu, en supposant que le rendement du sous-jacent
- ▶ sur une courte (infinitésimale) période de temps suit une loi Normale.
- ▶ On peut retrouver la formule de Black-Scholes à partir du modèle précédent
 - ▶ en faisant tendre M vers l'infini (et donc la durée des périodes vers 0)
 - ▶ en calibrant u et d à partir des paramètres de la loi normale ($\mathbb{E}$ et variance)

Vers un modèle en temps continu : les rendements

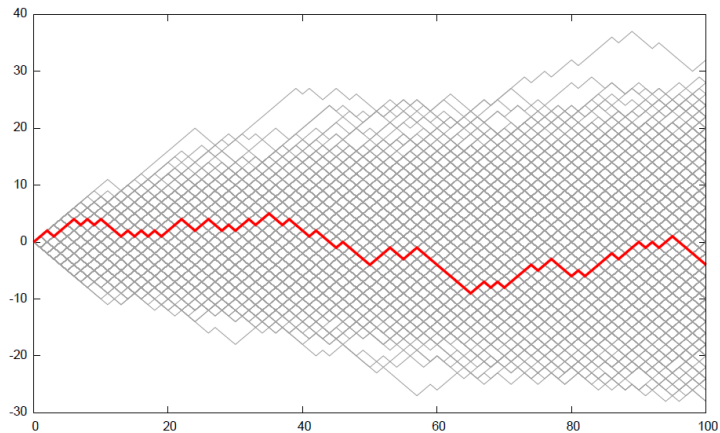
Évolution des rendements du sous-jacent $\frac{S_t - S_0}{S_0}$ avec $u = 1$, $d = -1$



$M = 10$

Vers un modèle en temps continu : les rendements

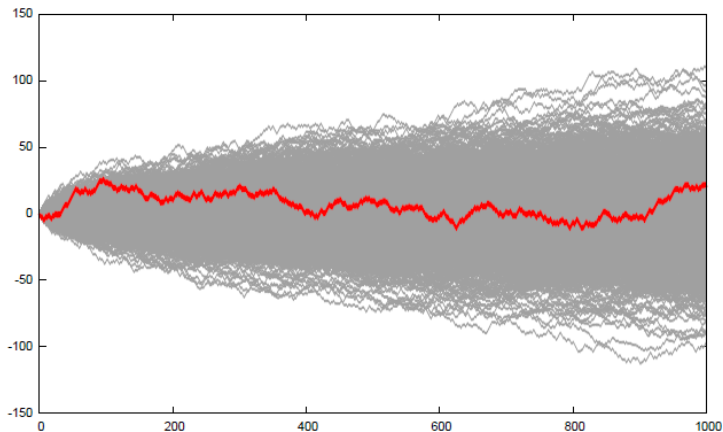
Évolution des rendements du sous-jacent $\frac{S_t - S_0}{S_0}$ avec $u = 1$, $d = -1$



$M = 100$

Vers un modèle en temps continu : les rendements

Évolution des rendements du sous-jacent $\frac{S_t - S_0}{S_0}$ avec $u = 1$, $d = -1$



$M = 1000$

à suivre

Résumé de la première partie du cours

- ▶ Arbitrage = profit certain, sans coût
- ▶ Absence d'opportunité d'arbitrage $\rightarrow$ loi du prix unique
- ▶ Permet l'évaluation par arbitrage via le portefeuille de réplication
- ▶ Conduit à évaluer les dérivés par l'espérance actualisée de leurs paiements futurs sous la probabilité risque neutre