Mathématiques pour la finance

Renaud Bourlès - École Centrale Marseille

Objectif du cours:

- Maîtriser les outils mathématiques nécessaires à la compréhension des modèles de mathématiques financières en temps discret
- Savoir actualiser et valoriser une obligation ; mesurer le risque non diversifiable (modèle CAPM) et valoriser les produits dérivés Call et Put (modèle CRR)

Chapitre 1
Introduction aux probabilités

Quelques exemples

Exemples d'**expériences** à nombre d'**issues** possibles notées ω_1, ω_2,...ω_n est **fini**

- lancer de dé a six issues possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6
- un tirage à pile ou face en a deux (...pile ou face!).

Utile de pouvoir se référer à l'issue d'une expérience.
Ex: écrire sous forme math. la somme de 4 lancers de dés
En notant X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ la valeur du résultat des lancers,
La somme des résultats des 4 lancers s'écrit $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.
Les X_i sont appelées des **variables aléatoires**.

Variable aléatoire = expression dont la valeur est le résultat d'une expérience particulière.

Soit X la variable aléatoire représentant un tirage de dés

- on doit assigner des probabilités à chaque résultat possible.

$\Leftrightarrow$ assigner à chaque issue un nombre (non négatif) $p(\omega_j)$ tel que $p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_6) = 1$ (on obtient nécessairement un des six chiffres)

- la fonction $p(\omega_j)$ est appelée la **fonction de distribution** de X.
- dé non truqué $\Rightarrow$ naturel d'assigner une probabilité égale, cad $1/6$ à chaque issue
- alors $\mathbb{P}(X \leq 4) = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow$ on a 2 chances sur 3 (ou 4 chances sur 6) d'obtenir un chiffre qui n'excède pas 4.

De la même manière

- si on appelle Y la variable aléatoire représentant le résultat d'un tirage à pile ou face
- Y peut prendre deux valeurs, pile ou face (notées P et F)
- Aucune raison de suspecter qu'un des deux résultats ait plus de chance que l'autre de se produire

$\Rightarrow$ naturel d'assigner une proba $1/2$ à chacun des 2 evnts

Attention : Pas toujours proba égale

- **Exemple :** une option donne un rendement positif dans 60 pourcent des cas

$\Rightarrow$ on assigne une probabilité

- $0,6$ au résultat "l'option donne un rendement positif"
- $0,4$ à l'issue "l'option donne un rendement négatif".

$\Leftrightarrow$ Concept de fréquence en probabilités

Définition 1.1

On appelle **univers des possibles** (Ω) l'ensemble des issues possibles d'une expérience $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Si l'univers décrivant l'expérience est fini ou infini dénombrable, la variable aléatoire associée sera dite finie. Chaque élément de Ω est appelé **événement élémentaire** et chaque sous-ensemble de Ω est appelé **événement**.

Exemple : Lancer de dé : l'univers des possible est un ensemble de 6 événements élémentaires $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'événement $E = \{2, 4, 6\}$ correspond à l'énoncé "le chiffre obtenu est pair"

Définition 1.2

Une distrib de proba est alors une application de Ω vers $[0,1]$ qui attribue à chaque evt élémentaire un nb réel compris entre 0 et 1 décrivant la fréquence à laquelle cet evt sera réalisé.

Definition

Une **fonction de distribution** est une fonction à valeur réelle $p(.)$ définie sur Ω telle que

1. $p(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$
2. $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Pour chaque événement E , la **probabilité** de E sera définie comme le nombre $\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$. On appelle la fonction $\mathbb{P}$, la mesure de probabilité.

Remarque : Cette déf implique notemment $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p(\omega)$

Exemples

1. Lancer de dé non truqué: $p(\omega) = \frac{1}{6}, \forall \omega \in \Omega$
   L'evt $E = \{2, 4, 6\}$ apparaît avec une proba
   $\mathbb{P}(E) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

2. Soit A, B et C, 3 candidats à une élection. $\Omega = \{A, B, C\}$
   Supposons que A et B aient la même chance de gagner, mais C moitié moins de chance que ses deux opposants:
   $p(A) = p(B) = 2p(C)$. Or $p(A) + p(B) + p(C) = 1$.

   La fonction de distribution de probabilité s'écrit donc:
   $p(A) = \frac{2}{5}$, $p(B) = \frac{2}{5}$, $p(C) = \frac{1}{5}$

   Soit E l'événement "A ou C gagne l'élection".
   Alors $E = \{A, C\}$ et $\mathbb{P}(E) = p(A) + p(C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Théorie des ensembles

Comme dans cette exemple, les événements peuvent souvent s'écrire en fonction d'autres événements à l'aide des constructions usuelles de la théorie des ensembles.

Soit A et B deux ensembles:

- L'union de A et B : $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$
  Attention: "ou" inclusif: $e \in A$ et $e \in B \Rightarrow e \in (A \cup B)$
- L'intersection de A et de B : $A \cap B = \{x | x \in A \text{ et } x \in B\}$
- La différence entre A et B : $A \backslash B = \{x | x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- A est un sous-ensemble de B, $A \subset B$ si chaque élément de A est aussi élément de B
- Le complémentaire de A : $\overline{A} = \{x | x \in \Omega \text{ et } x \notin A\}$

Définition 1.3

Definition

Si $A \cap B = \emptyset$ (où $\emptyset$ représente l'ensemble vide), on parlera d'**ensembles disjoints** et d'**événements mutuellement exclusifs**. De plus, si $E_1, E_2, ..., E_n$ sont mutuellement exclusifs (deux à deux) et $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$ alors les événements $E_1, E_2, ..., E_n$ sont dits **mutuellement exclusifs et exhaustifs** et forment une **partition** de Ω

Théorème 1.1

Les proba assignées aux elmts d'une expérience décrite par une fct de distrib définie sur Ω satisfont les propriétés suivantes

1. $0 \leq \mathbb{P}(E) \ \ \forall E \subset \Omega$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. si $E \subset F \subset \Omega$, alors $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$ $(\Rightarrow \mathbb{P}(E) \leq 1 \ \ \forall E \subset \Omega)$
4. A et B disjoints $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
   $\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
5. Si les événements $E_1, \ldots, E_n$ forment une partition de Ω alors pour tout événement A dans Ω: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_i)$
   $(\Rightarrow \forall A, B \in \Omega, \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \backslash B))$
6. $\forall A, B \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$

Définitions 1.4 et 1.5

Definition

Un **espace probabilisé fini** est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble fini décrivant tous les résultats possible d'une expérience et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité qui satisfait le théorème 1.1.

Definition

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilité fini. Alors une **variable aléatoire réelle** est une fonction X qui, à tout ensemble $E \subset \Omega$, associe un nombre $X(E) \in \mathbb{R}$ ($X : \Omega \to \mathbb{R}$). L'ensemble des valeurs prises par X est appelé univers-image et noté $X(\Omega)$.

Exemples

1. On lance 3 fois une pièce de monnaie. Soit X le nombre de "pile(s)" obtenu(s). Alors X est une variable aléatoire d'univers-image $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
2. On lance une pièce jusqu'à obtenir "pile". Soit X le nombre de lancers. Alors X est une variable aléatoire d'univers-image $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
3. On parie 100 € sur un numéro à la roulette. Soit X le gain. Alors X est une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{-100, 3500\}$

Définition 1.6

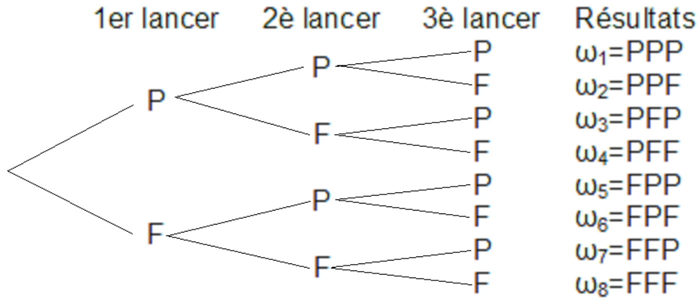
Definition

Soit X une variable aléatoire réelle. La **loi** de X est la probabilité que X prenne chacune des valeur de son univers image:

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x_i & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x_i) \end{array}$$

La notion d'arbre de choix

Lorsque l'exp peut être décrite séquentiellement, comme le 1er des ex précédents (on lance 3 fois un dé), il peut s'avérer utile de recourir à un **arbre de choix**:



Chaque "branche" correspond à un des résultats possibles.
Il y a donc ici 8 branches $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8$.

Si on suppose que chaque résultat a la même probabilité, chaque branche aura un poids de $1/8$.

- Soit $E =$ "on obtient au - un pile". Alors $\overline{E}$ ="on n'obtient jamais de pile" et $\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}(\{FFF\}) = p(FFF) = 1/8$.
  En utilisant le 4ème point du théorème 1.1, on obtient alors:
  $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}) = 7/8$
  $\Rightarrow$ Il est parfois plus simple de déterminer la probabilité de l'évenement complémentaire.

- Soit A="le 1er lancer donne F" et B ="le 2è lancer donne P".
  En utilisant l'arbre on remarque $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$.
  On remarque aussi $A \cap B = \{\omega_5, \omega_6\}$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.
  Ainsi, d'après le 6ème item du théorème 1.1:
  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/2 + 1/2 - 1/4 = 3/4$

  Remarque: $A \cup B = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PPF, PPP\} \Rightarrow$ on peut aussi obtenir le résultat par énumération directe