Chapitre 11

Espérance et variance d'une variable aléatoire continue

Espérance d'une variable continue

Rappel : Dans le cas d'une variable discrète, l'espérance est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$$

Ce concept peut être étendu au cas de variables continues

Definition

Soit X une vabiable aléatoire continue de densité f. L'espérance de X est alors définie par l'intégrale

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

<u>Remarque</u> $\mathbb{E}(X)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < +\infty$

Variance d'une variable continue

En utilisant le fait que,

Théorème

Si X est une v.a. continue et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx$$

si cette intégrale existe

on a ensuite comme dans le cas discrêt :

Definition

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Le cas de la distribution uniforme

Si $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}\text{le centre de [a,b]} \\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{4(a^2+ab+b^2)-3(a^2+2ab+b^2)}{12} \\
&= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

Le cas de la distribution normale

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

En notant $y \equiv x - \mu$, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

Or, par définition de la densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = 1$

Par ailleurs, $ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$ étant une fonction impaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = 0$$

Ainsi,

Théorème

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors $\mathbb{E}(X) = \mu$

Afin de calculer la variance d'une distribution normale, il est utile d'utiliser la **fonction génératrice** des moments.

Definition

La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X s'écrit $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$

En posant $t = 0$, elle nous permet de générer tout les moments de la variable X:

$$\begin{aligned}
M_X^{'}(t) = \mathbb{E}\left(Xe^{tX}\right) &\Rightarrow M_X^{'}(0) = \mathbb{E}(X) \\
M_X^{''}(t) = \mathbb{E}\left(X^2e^{tX}\right) &\Rightarrow M_X^{''}(0) = \mathbb{E}(X^2) \\
&\ldots \\
&\Rightarrow \boxed{M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)}
\end{aligned}$$

Dans le cas de la distribution normale :

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+tx} dx$$

Or, $-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 tx\right] =$
$-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + \mu^2\right] =$
$-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + (\mu+\sigma^2 t)^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2 + \mu^2\right] =$
$-\frac{\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^4 t^2 + 2\mu\sigma^2 t}{2\sigma^2} = -\frac{\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2}{2\sigma^2} + \left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

Ainsi, $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2}{2\sigma^2}}$

Or, $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2}{2\sigma^2}} dx$ est la densité de $\mathcal{N}(\mu + \sigma^2 t, \sigma)$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2}{2\sigma^2}} = 1$

Et $\boxed{M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$

Alors $M_X'(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} (\mu + \sigma^2 t)$.
On retrouve donc $\mathbb{E}(X) = M_X'(0) = \mu$

Par ailleurs, $M_X''(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left[(\mu + \sigma^2 t)^2 + \sigma^2\right]$
Donc $\mathbb{E}(X^2) = M_X''(0) = \mu^2 + \sigma^2$
Ainsi $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sigma^2$

Donc la signification des paramètre de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est la suivante :

- μ est la moyenne de X
- σ est l'écart-type de X

Definition

Une variable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est appelée variable normale (ou gaussienne) centrée-réduite (en anglais "standard normal")

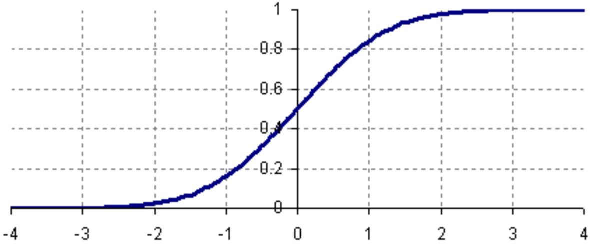
Dans ce cas, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Et la fonction de distribution s'écrit :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

On ne peut pas calculer cette intégrale explicitement mais on peut le faire numériquement avec une précision arbitraire.

Cette fonction $\Phi(x)$ est implémentée dans les routines standards des logiciels mathématiques (Mathlab, VBA,...). En ce sens, elle n'est pas plus compliquée que $\sin(x)$



Cette distribution est primordiale car elle permet de retrouver n'importe quelle distribution normale

Théorème

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors $Y \equiv \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Démonstration :

- $F_Y(x) = P(Y \leq x) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \sigma x + \mu) = F_X(\sigma x + \mu)$
- $f_Y(x) = F_Y'(x) = \sigma F_X'(\sigma x + \mu) = \sigma f_x(\sigma x + \mu)$
  $= \sigma \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{((\sigma x+u)-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
  $\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

Corollaire

La fonction de distribution de $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ peut être exprimée de la manière suivante

$$F_{(\mu,\sigma)}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Par conséquent, il suffit de connaître (savoir calculer) la fonction de distribution de $\mathcal{N}(0, 1)$ pour pouvoir calculer $F_{\mu,\sigma}(x)$ $\forall \mu, \sigma$.

La relation correspondante pour les densités est :

$$f_{(\mu,\sigma)} = \frac{1}{\sigma} f_{(0,1)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$