Chapitre 12

Probabilités conditionnelles et couple de variables aléatoires continues

Probabilités conditionnelles par rapport à un événement

On peut répliquer dans le cas continu, la procédure utilisée dans le cas discret

Par exemple, si X est une v.a. continue et E un événement de probabilité non nulle, la fonction de densité conditionnelle est définie par

$$f(x|E) = \begin{cases} f(x)/\mathbb{P}(E) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Et, pour tout événement F

$$\mathbb{P}(F \mid E) = \int_F f(x \mid E)dx$$

Comme dans le cas discret, on peut facilement obtenir une expression plus simple pour cette probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(F \mid E) = \int_F f(x \mid E)dx = \int_{E \cap F} \frac{f(x)}{\mathbb{P}(E)}dx = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)}$$

Il apparait ainsi que la fonction de densité conditionnelle est égale à 0 sauf dans E, et a une intégrale égale à 1 sur E.

Par exemple si la densité de base est uniforme, cad correspond à une expérience où chaque événement à la même probabilité, alors il en sera de même pour la densité conditionnelle.

Dans l'**exemple** du pointeur, on suppose que l'aiguille pointe la partie haute du cercle $0 \leq x < 1/2$. Quelle est la probabilité que $1/6 \leq x < 1/3$?

Ici $E = \left[0, \frac{1}{2}\right[$, $E = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right[$ et $E \cap F = F$
Donc $\mathbb{P}(F \mid E) = \dfrac{\mathbb{P}(F \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \dfrac{1/6}{1/2} = \dfrac{1}{3}$
ce qui semble raisonnable puisque F represente un tiers de E.

La fonction de densité conditionnelle est alors donnée par

$$f(x|E) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Ainsi la fonction de densité conditionnelle est donc non nulle seulement sur $[0, 1/2[$, où elle est uniforme.

Événements indépendants

Soient E et F deux événements ayant une probabilité non nulle dans un espace de probabilité continu. Alors, comme dans le cas discrêt, E et F seront indépendant si

$$\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E) \text{ et } \mathbb{P}(F|E) = \mathbb{P}(F)$$

Comme précédemment, chacune des équations précédentes implique l'autre. Ainsi pour vérifier que deux événements sont indépendants, il suffit d'en vérifier une.

Cela implique notamment que E et F sont indépendant si et seulement si

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

Couple de v.a. et densité jointe

De manière analogue à ce que nous avons fait dans le cas discret, on peut définir une fonction de distribution jointe et une densité jointe pour un couple de variable aléatoire

Definition

Soient X et Y deux v.a. continue. Alors leur fonction de distribution jointe est définie par

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

Dans le cas général, la fonction de distribution jointe de n variable X_1, X_2,..., X_n est définie par

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$

La fonction de densité jointe est alors définies par l'équation

$$\boxed{F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)dt.ds}$$

dans le cas d'une couple de variables.

Et par l'équation

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, ..., t_n)dt_n dt_{n-1}...dt_1$$

dans le cas de n v.a.

On a alors

$$\boxed{f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}} \text{ et } f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}$$

Variables aléatoires indépendantes

Definition

Deux variables X et Y sont **indépendantes** si

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire si

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Dans le cas général X_1, X_2,...,X_n sont mutuellement indépendantes si

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)...F_n(x_n) \ \forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$$

Ainsi des v.a. sont mutuellement indépendantes si leur fonction de distrib. jointe est égale au produit de leurs fonctions de distrib. individuelles.

Théorème

Si X_1, X_2,..., X_n sont mutuellement indépendantes, alors

1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)...f_n(x_n)\ \forall f_1, f_2, ..., f_n \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{E}(X_1, X_2, ..., X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)...\mathbb{E}(X_n)$
3. Plus généralement, pour toutes fonctions ϕ_1, ϕ_2,...,ϕ_n $\mathbb{E}(\phi_1(X_1), ..., \phi_n(X_n)) = \mathbb{E}(\phi_1(X_1))\mathbb{E}(\phi_2(X_2))...\mathbb{E}(\phi_n(X_n))$

Exemple : Soit X et Y deux v.a. indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(e^{tX+sY})$

- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mu_1\mu_2$
- $\mathbb{E}(e^{tX+sY}) = \mathbb{E}(e^{tX}e^{sY}) = \mathbb{E}(e^{tX})\mathbb{E}(e^{sY}) = M_X(t)M_Y(s)$ $= e^{\mu_1 t+\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{\mu_2 t+\frac{\sigma_2^2 s^2}{2}}$

Attention : Piège à éviter : $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$ n'est pas égal à $\frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(Y)}$ même si X et Y sont indépendants

Si X et Y sont indép. alors $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(X\frac{1}{Y}\right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)$

En général $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) \neq \frac{1}{\mathbb{E}(Y)}$ comme le montre l'exemple suivant.

Soit $Y \sim \mathcal{U}(1,3)$.

Alors, par définition $\mathbb{E}(Y) = \frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}(Y)} = \frac{1}{2}$

Or $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f_Y(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{x}.\frac{1}{3-1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln x\right]_1^3$
$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3$

$\frac{1}{2}\ln 3 \neq \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) \neq \frac{1}{\mathbb{E}(Y)}$

Covariance

Comme de le cas discret, on a ensuite:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right] \\ &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Ainsi, si X et Y sont indépendant alors :

$$Cov(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=0$$

Attention, la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant

Exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, et W indépendant de X tel que :

$$W = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1/2 \\ -1 & \text{avec probabilité } 1/2 \end{cases}$$

Soit $Y = WX$

Montrons tout d'abord que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(WX \leq x) \\ &= \mathbb{P}(WX \leq x, W = 1) + \mathbb{P}(WX \leq x, W = -1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x, W = 1) + \mathbb{P}(X \geq -x, W = -1) \\ &= \tfrac{1}{2} F_X(x) + \tfrac{1}{2}(1 - F_X(-x)) \\ &= F_X(x) \text{ car } f_x \text{ est symétrique} \\ &\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(WX^2)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(WX)\\ &= \mathbb{E}(W)\left[\mathbb{E}(X^2)-(E(X))^2\right]=0 \text{ car } \mathbb{E}(W)=0\end{aligned}$$

Or X et Y ne sont pas indépendants

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^X e^Y\right) &= \mathbb{E}\left(e^{(1+W)X}\right)=\mathbb{E}\left(e^{2X}\mathbb{1}_{W=1}\right)+\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{W=-1}\right)\\ &= M_X(2)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^2+1)\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}\left(e^X\right)\mathbb{E}\left(e^Y\right)=\left(\mathbb{E}\left(e^X\right)\right)^2=(M_X(1))^2=e\neq\frac{1}{2}(e^2+1)$$

Coefficient de corrélation

Comme dans le cas discret

Définition

On appelle coefficient de corrélation de deux variables X et Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}$$

<u>Propriété</u> : $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$

Densité conditionnelle

Par analogie avec le cas discret, on peut construire dans le cas continu une "probabilité" conditionnelle par rapport à une variable. On parle alors de densité conditionnelle

Définition

Soient X et Y deux variables continues. La densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est alors définie par

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

où $f_{X,Y}(x,y)$ est la densité jointe de X et Y, et f_Y la densité de Y.

Remarque : Si X et Y sont indépendants, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ $\forall x, y$

Espérance conditionnelle par rapport à une variable

On peut alors définir l'espérance conditionnelle d'une v.a. continue par rapport à une autre variable :

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires continues. Alors, l'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ s'écrit

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_{X|Y}(x \mid y)dx$$