Chapitre 14
Vecteurs gaussiens

Rappels

Un vecteur aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) \end{array}$$

où chaque composante est une variable aléatoire sur Ω
On a alors

- $F_X(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n)$
- $F_{X_i}(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i)$
- $F_{X_i}(x_i) = F_X(+\infty, ..., x_i, ..., +\infty)$, et
- $F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)...F_{X_n}(x_n)$ si $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes

Définition

Un vecteur aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dit gaussien (ou normal) si il peut s'écrire $X = \mu + AZ$:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_m \end{pmatrix}$$

où $Z_1, \dots, Z_m$ sont des variables gaussiennes (normales) centrées réduites **indépendantes**.

Autrement dit, les composantes d'un vecteur gaussien sont des combinaisons linéaires des variables normales $Z_1, \dots, Z_m$:
$X_i = \mu_i + a_{i1} Z_1 + \dots + a_{im} Z_m$

Si $n = m$ et la matrice A est inversible, on dit que X est non-sigulier.

Exemple 1

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

avec $Z_1 \perp Z_2$ et $Z_1, Z_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$

Alors $X = (X_1, X_2)$ est un vecteur gaussien non-singulier avec : $X_1 = \mu_1 + Z_1 + Z_2$ et $X_2 = \mu_2 + Z_1 - Z_2$

Exemple 2

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \end{pmatrix}, \text{ avec } Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Alors $X = (X_1, X_2) = (\mu_1 + Z_1, \mu_2 + Z_1)$ est un vecteur gaussien singulier

Espérance et Variance d'un vecteur gaussien

Rappelons qu'une variable gaussienne (normale) μ, σ est caractérisée par deux paramètres : la moyenne μ et l'écart-type σ (ou la variance σ^2).

De manière analogue, un vecteur gaussien est caractérisé pas le vecteur $\mathbb{E}(X)$ et la matrice de variance-covariance :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & . & \ldots & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

Remarque : cette matrice est symétrique puisque $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(X_j, X_i)$

Proposition

Soit $X = \mu + AZ$ un vecteur gaussien. Alors

- $\mathbb{E}(X) = \mu$ (c'est a dire $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$, $i = 1, ..., n$) et
- la matrice de variance-covariance de X vaut $\Gamma = AA^T$

Démonstration : On a

$$X_i = \mu_i + a_{i1}Z_1 + ... + a_{im}Z_m = \mu_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}Z_j$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_i) = \mu_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbb{E}(Z_j) = \mu_i \text{ car } Z_j \sim \mathcal{N}(0,1),$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = Var(\mu_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}Z_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \mathrm{Var}(Z_j) \text{ (les } Z_j \text{ sont } \perp)$$

Comme $Z_j \sim \mathcal{N}(0,1)\ \forall j$

$$\text{Var}(X_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = (a_{i1}\ \ a_{i2}...a_{im}) \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ . \\ . \\ a_{im} \end{pmatrix} = A_i.A_i^T$$

Pour $i \neq k$,

$$\text{Cov}(X_i, X_k) = \text{Cov}\left(\mu_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} Z_j, \mu_k + \sum_{l=1}^{m} a_{kl} Z_k\right) =$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\mu_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} Z_j\right)\left(\mu_k + \sum_{l=1}^{m} a_{kl} Z_k\right)\right] - \mathbb{E}\left(\mu_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} Z_j\right)\mathbb{E}\left(\mu_k + \sum_{l=1}^{m} a_{kl} Z_k\right)$$

$$= \mu_i \mu_k + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} a_{kj} \underbrace{\mathbb{E}\left(Z_j^2\right)}_{=1} - \mu_i \mu_k = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} a_{kj}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}a_{kj} = (a_{i1}\ a_{i2}...a_{im}) \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ . \\ . \\ a_{km} \end{pmatrix} = A_i.A_k^T$$

et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A_1A_1^T & ... & A_1A_n^T \\ A_2A_1^T & ... & A_2A_n^T \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ A_nA_1^T & ... & A_nA_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ---A_1--- \\ ---A_2--- \\ . \\ . \\ . \\ ---A_n--- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ A_1 & A_2 & . & A_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix} = A.A^T$$

Exemple

- $m = n = 1$, $X = \mu + aZ$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
  $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = a^2 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu, a^2)$

- $m = n = 2$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_1) = a_{11}^2 + a_{12}^2,\ \mathrm{Var}(X_1) = a_{21}^2 + a_{22}^2$$

$$\text{et} \quad \mathrm{Covar}(X_1, X_2) = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}$$

- $m = 1,\ n = 2$

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \end{pmatrix} \\
& X_1 = \mu_1 + a_{11} Z_1,\ X_2 = \mu_2 + a_{21} Z_1 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\
& \Gamma = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11} a_{21} \\ a_{11} a_{21} & a_{21}^2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad & \mathrm{Var}(X_1) = a_{11}^2,\ \mathrm{Var}(X_1) = a_{21}^2 \\
\text{et} \quad & \mathrm{Covar}(X_1, X_2) = a_{11} a_{21}
\end{aligned}
$$

- $m = 2,\ n = 1$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \\
X_1 &= \mu_1 + a_{11} Z_1 + a_{12} Z_2 \\
\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_1) &= \mu_1 \text{ et } \Gamma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = a_{11}^2 + a_{12}^2 \\
\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_1) &= a_{11}^2 + a_{12}^2
\end{aligned}$$

Indépendance

Proposition

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^M$ *tels que* $Z = (X, Y) = (X_1, ..., X_N, Y_1, ..., Y_M)$ *est un vecteur gaussien.*

Alors X *et* Y *sont indépendants si et seulement si ils sont non corrélés* $(Cov(X_i, Y_j) = 0,\ i = 1, ..., n; j = 1, ..., m)$

Exemple : $n = 1$, $m = 1$. Soit $V = (X, Y)$ un vecteur gaussien non singulier, i.e. :

$$\begin{array}{l} X = \mu_1 + a_{11} Z_1 + a_{12} Z_2 \\ Y = \mu_2 + a_{21} Z_2 + a_{22} Z_2 \end{array}, Z_1 \perp Z_2 \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ inversible}$$

Alors X et Y indépendants $\Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

$\Leftrightarrow a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} = 0$

Corrolaire

Soit

$$X \sim \mathcal{N}(0,1),\ W = \begin{cases} 1 & , 1/2 \\ -1 & , 1/2 \end{cases},\ Y = WX$$

Le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien même si les deux composantes sont gausiennes : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. En effet, on a vu (chap 12) que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ mais X et Y ne sont pas indépendants, donc (X, Y) ne peut pas être gaussien

Densité d'un vecteur gaussien

Si $X = (X_1, ..., X_n)$ $(X = \mu + AZ)$ est un vecteur gaussien non singulier de matrice de variance-covariance Γ alors il admet une densité donnée par:

$$f_x(y) = \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{det(\Gamma)}} e^{-\frac{1}{2}(y-\mu)^T \Gamma^{-1}(y-\mu)}$$

où $y = (y_1, ..., y_n)^T$ et $\Gamma = AA^T$

Si $n = 1$, on a $\Gamma = \sigma^2$ et on retrouve la densité d'une variable gaussienne
Si $n = 2$, avec $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho$ alors

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\Pi\sqrt{1-\rho^2}} . e^{-(x^2-2\rho xy+y^2)/(2(1-\rho^2))}$$

Espérance conditionnelle

Proposition

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^M$ *tels que* $Z = (X, Y)$ *est un vecteur gaussien. Alors* $\mathbb{E}(Y \mid X)$ *est égale à la régression linéaire (MPL) de* Y *sur* $\{X_1, ..., X_N\}$.

En particulier si $N = 1$ *et* $Var(X) \neq 0$

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}(Y) + \frac{cov(X, Y)}{Var(X)}(X - \mathbb{E}(X))$$

Rappel sur les régressions linéaires

La régression de Y sur X_1,...,X_N est la combinaison linéaire de $1, X_1, ..., X_n$: $\widetilde{Y} = a_0 + a_1 X_1 + ... + a_N X_N$ telle que la distance entre Y et $\widetilde{Y}$ (définie comme $\mathbb{E}((Y - \widetilde{Y})^2)$) soit minimale

<u>Utilisation</u> :

- Y est une variable non observable et X_1,...,X_N sont des variables observables $\longrightarrow$ déduire la valeur de Y le plus précisément possible à partir de l'observation de X_1,...,X_N
- Y est une quantité complexe dépendant de plusieurs facteurs et on veut la représenter comme une fonction linéaire de quelques facteurs explicatifs X_1,...,X_N. Par exemple, Y est la valeur d'une option et les facteurs explicatifs sont le taux de croissance américain et le rendement de l'action à la période précédente

La différence avec l'éspérance conditionnelle

L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid Y)$ est la projection de Y sur l'espace de **toutes** les fonctions de X ($\mathbb{E}(Y \mid X) = h(X)$).

La régression linéaire est la projection de Y sur l'espace des **fonctions affines** de X : $\widetilde{Y} = a_0 + a_1 X_1 + ... + a_N X_N$

Cette différence disparaît dans le cas gaussien : l'espérance conditionnelle est égale à la régression linéaire

Exemple

Soient U et X deux v.a. gaussienne indépendantes :
$U \sim \mathcal{N}(\mu_u, \sigma_u)$, $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$, $U \perp X$
On pose $Z = X - \frac{1}{2b}(U - \mu_u)$. Calculer $\mathbb{E}(U \mid Z = \overline{z})$.

(la notation $\mathbb{E}(U \mid Z = \overline{z})$ signifie qu'on doit calculer $\mathbb{E}(U \mid Z)$ et remplacer Z par $\overline{z}$)

Le couple (U,Z) est gaussien parce que U et Z sont des combinaisons affines de loi normales centrales centrées réduites indépendant $G_X = \frac{X-\mu_x}{\sigma_X}$ et $G_U = \frac{U-\mu_u}{\sigma_U}$:

$$\begin{pmatrix} U \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_U \\ \mu_X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_U & 0 \\ -\dfrac{\sigma_u}{2b} & \sigma_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_U \\ G_X \end{pmatrix}$$

$(Z = \mu_X + \sigma_X G_X - \frac{1}{2b}\sigma_U G_U)$

$$\Gamma = AA^T = \begin{pmatrix} \sigma_U^2 & -\sigma_U^2/2b \\ -\sigma_U^2/2b & \sigma_X^2 + \sigma_U^2/4b^2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U \mid Z) &= \mathbb{E}(U) + \frac{\mathrm{Cov}(U,Z)}{\mathrm{Var}(Z)}(Z - \mathbb{E}(Z)) \\
&= \mu_U - \frac{\sigma_U^2/2b}{\sigma_X^2 + \sigma_U^2/4b^2}(Z - \mu_X) \\
\Rightarrow \mathbb{E}(U \mid Z = \overline{z}) &= \mu_U - \frac{\sigma_U^2/2b}{\sigma_X^2 + \sigma_U^2/4b^2}(\overline{z} - \mu_X)
\end{aligned}$$