Chapitre 15
Mouvements Browniens

Historique

En 1827 (seulement 35 après la création de la "New York Stock Exchange"), un botaniste anglais du nom de Robert Brown a étudié le mouvement du fluide situé à l'intérieur des grains de pollen. Il remarqua alors que ce liquide suivaient un "mouvement de grouillement continue" apparemment cahotique. Brown attribua tout d'abord ce mouvement à une activité vitale.

La première explication scientifique de ce phénomène vient de Albert Einstein.Il montra en 1905 que ce mouvement (maintenant appelé mouvement Brownien) pouvait être expliqué par le "bombardement continuel de particule, exercé par les molécules du liquide"

La première description mathématique du phénomène et de ses propriétés a ensuite été fournie par le fameux mathématicien Norbert Wiener en 1918. Un mouvement Brownien sera donc parfois appelé processus de Wiener.

Il est surtout intéressant pour nous de noter que le phénomène de mouvement Brownien a été utilisé en 1900 par le mathématicien français Bachelier pour modéliser les mouvement de prix d'une option.

La difficulté de modélisation du mouvement brownien réside dans le fait que ce mouvement est aléatoire et que statistiquement, le déplacement est nul : il n'y a pas de mouvement d'ensemble.

Processus stochastique continu

Rappel : Un processus stochastique fini est une séquence $X_1, ..., X_n$ de variables aléatoires définis sur l'espace Ω

Définition

Un **processus stochastique continu** sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est une collection $\{X_t \mid t \in I\}$ de variables aléatoires de Ω indéxés par la variable de t (appartenant à I)

Par la suite, t représentera le temps et nous considèrons généralement $I =]0, +\infty[$. La valeur du processus au temps t sera alors représenté par la valeur de la variable aléatoire X_t

Définition (1)

Un processus stochastique $\{W_t | t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien (ou processus de Wiener) de **volatité** σ si

1. $W_0 = 0$
2. W_t suit une loi normale de moyenne 0 et de variance $\sigma^2 t$ ($\mathcal{N}(0, \sigma\sqrt{t})$)
3. $\{W_t\}$ est un processus à **accroissement stationnaire**, càd que, pour $s < t$, l'accroissement $W_t - W_s$ ne dépend que de la valeur de $t - s$. Ainsi $W_t - W_s$ (qui a la même distrib que $W_{t-s} - W_0 = W_{t-s}$) suit une normale de moyenne 0 et de variance $\sigma^2(t-s)$: $\mathcal{N}(0, \sigma\sqrt{t-s})$
4. $\{W_t\}$ est un processus à **accroissement indépendants**, c'est à dire que pour toute séquence de temps $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, les accroissements "non imbriqués" : $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes

Définition (2)

Il est aussi possible de définir la notion de mouvement Brownien avec **dérive**. Il s'agit d'un processus stochastique de la forme $\{\mu t + W_t \mid t \geq 0\}$ où μ est une constante et $\{W_t\}$ un mouvement brownien :

Définition

1. $W_0 = 0$
2. W_t suit une loi normale de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$ $(\mathcal{N}(\mu t, \sigma\sqrt{t})$
3. $\{W_t\}$ est un processus à **accroissement stationnaire**. Ainsi $W_t - W_s$ suit une normale de moyenne $\mu(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$: $\mathcal{N}(\mu(t-s), \sigma\sqrt{t-s})$
4. $\{W_t\}$ est un processus à **accroissement indépendants**

Exemple 1 : Un mouvement brownien à forte volatilité

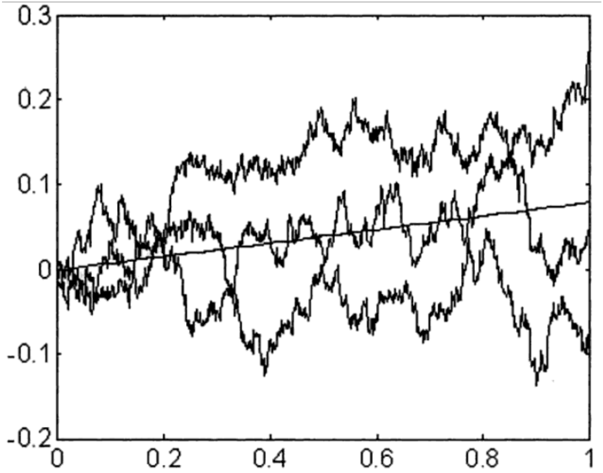
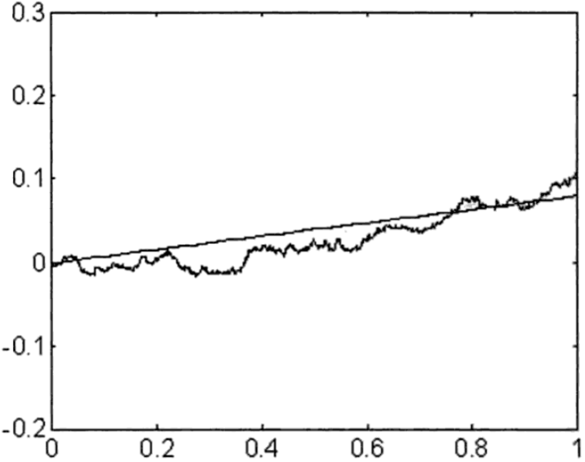


Figure 1: Brownian motion sample paths: $\mu = 0.08, \sigma = 0.20$

Exemple 2 : Un mouvement brownien à faible volatilité ($\mu = 0,08$, $\sigma = 0,05$)



Les mouvements Browniens représentent l'un des plus importants processus stochastique et ont de nombreuses implications. Cela est notemment dû au TCL et à l'importance de la loi normal (un mouvement brownien est une sorte de "distribution normale en mouvement")

Les mouvements browniens ont par ailleurs de nombreuses propriétés importantes. Par exemple, le sentier d'un mouvement brownien est toujours continu (càd ne connait pas de saut). Par ailleurs, ces sentiers ne sont "différentiable nul part" (on ne pas définir de tangeante). Ainsi, un sentier de mouvements brownien change constament de direction de façon abrupte.

Mouvement brownien standard

Un mouvement brownien $\{W_t \mid t \geq 0\}$ avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ est appelé **mouvement brownien standard**. Dans ce cas W_t a une moyenne 0 et une variance t.

N'importe quel mouvement brownien $\{W_t \mid t \geq 0\}$ de dérive μ et de variance σ^2 peut alors s'écrire $W_t = \mu t + \sigma Z_t$ où $\{Z_t \mid t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard

Mouvement brownien géométrique et évaluation d'actions

En quoi un mouvement brownien est-il relié au prix d'une action?

- le prix d'une action peut être vu comme une particule soumis à un bombardement constant par des "particules plus petites" sous la forme d'échanges d'options ou d'autres événements locaux
- la distrib normale semble être un choix raisonnable pour modéliser le prix d'une action si on considère que les mouvements du prix résultent d'un grand nombre de facteurs plus ou moins indépendants (et identiquement distribués)

Problèmes

- Un nouvement brownien peut être négatif
- $\mathbb{E}(W_t - W_s) = \mu(t - s)$. Ainsi l'espérance de changement de prix d'une action sur une période donnée ne dépendrait pas du prix initial W_s. Or si on considère $\mu(t - s) = 10e$, autant une augmentation de $10e$ semble raisonnable si $W_s = 100e$, autant elle paraît improbable si $W_s = 1e$

Ces problèmes semblent pouvoir être résolus en considérant que le **rendement** de l'action suit un mouvement brownien (cette quantité semblant pouvoir être indépendante de la valeur de départ, $r = 10\% \Rightarrow 100 \rightarrow 110$ ou $1 \rightarrow 1,1$)

Cela peut être effectué en supposant que S_t le prix de l'action au temps t est donné par

$$S_t = S_0 e^{H_t}$$

où S_0 est le prix initial et H_t est un mouvement brownien

H_t représente alors le rendement (composé continuellement) du prix de l'action sur la période $[0, t]$. H_t représente aussi la croissance logarithmique du prix de l'action :

$$H_t = log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

Définition

Un processus stochastique de la forme $\{e^{W_t} \mid t \geq 0\}$ où $\{W_t \mid t \geq 0\}$ est un mouvement brownien est appelé **mouvement brownien géométrique**

Remarque : On peut toujours écrire $H_t = log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \mu t + \sigma W_t$ où $\{W_t\}$ est un mouvement brownien standard. Ainsi $H_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma\sqrt{t})$ et par définition S_t/S_0 suit une loi lognormale.

Un exemple de mouvement brownien géométrique avec dérive

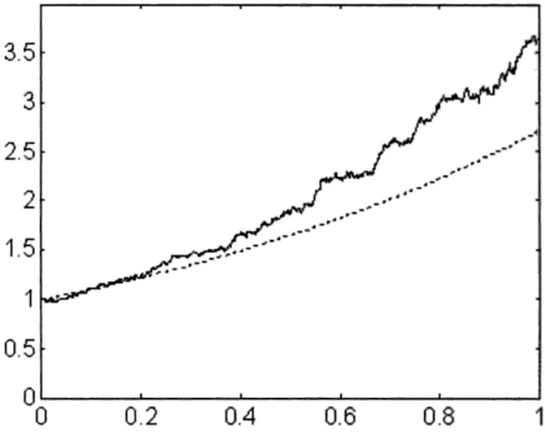


Figure 3: Geometric Brownian motion