Chapitre 16
Le lemme d'Itô

Rappel : Processus de Wiener

- si Z suit un processus de Wiener (mouvement brownien) **standard** alors la variation δz durant un court intervalle δt s'écrit :

$$\delta z = \epsilon\sqrt{\delta t} \quad , \text{où } \epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$$

(cf. point 3 de la déf. p. 5 du chapitre 15, avec $\sigma = 1$)

- tout processus de Wiener général X (avec tendance) peut s'écrire :

$$dx = \mu dt + \sigma dz$$

- ainsi, dans un intervalle de temps δt, la variation δx de x s'écrit

$$\delta x = \mu\delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\delta t} \quad , \text{où } \epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Processus du cours des actions

On a vu que dans le cas des actions, il était plus réaliste de supposer que le rendement de l'action : $H_t = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ suit un processus de Wiener.

Ainsi, si l'action vaut S aujourd'hui, la variation de son prix δS sur l'intervalle de temps δt sera défini par :

$$\begin{aligned} \delta H = \frac{\delta S}{S} &= \mu\delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\delta t} \quad \text{, c'est-à-dire} \\ \delta S &= \mu S\delta t + \sigma S\epsilon\sqrt{\delta t} \end{aligned}$$

Remarque : $\frac{\delta S}{S} \sim \mathcal{N}(\mu\delta t, \sigma\sqrt{\delta t})$

Exemple :

Soit une action qui ne verse pas de dividende. On suppose que sa volatilité est de 30% par an ($\sigma = 0,3$) et son taux de rentabilité composé en continu a pour espérance 15% par an ($\mu = 0,15$).
Si S est le cours de l'action à une date particulière et si δS est l'augmentation du cours dans le prochain intervalle de temps δt, alors :

$$\frac{\delta S}{S} = 0,15\delta t + 0,30\epsilon\sqrt{\delta t} \quad \text{, où } \epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Considérons un intervalle de temps d'une semaine, soit $1/52$ an et supposons que le cours initial de l'action soit 100€. Alors

$$\delta S = 100(0,15x1/52 + 0,30\sqrt{1/52}\epsilon) = 0,288 + 4,16\epsilon$$

Ainsi la hausse du cours suit une $\mathcal{N}(0,288;4,16)$

Processus d'Itô

Les paramètres μ et σ d'un processus de Wiener ($\delta x = \mu\delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\delta t}$) sont constants.

Or on a vu dans le cas du cours d'une action qu'à la fois la tendance et le paramètre de variance sont succeptible de varier au fil du temps (notemment en fonction du prix courant).

Un processus stochastique encore plus général, appelé processus d'Itô, autorise les paramêtres μ et σ à être des fonctions de la variable x et du temps t :

$$\begin{aligned} dx &= \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)\epsilon dz \text{ , ou} \\ \delta x &= \mu(x,t)\delta t + \sigma(x,t)\epsilon\sqrt{\delta t} \end{aligned}$$

(en supposant que la tendance et la variance restent constants entre t et $t + \delta t$)

Le lemme d'Itô - Introduction

La valeur d'une option est une fonction du cours de l'action sous-jacente. De façon plus générale, la valeur d'un produit dérivé est une fonction des variables aléatoires sous-jacente au produit dérivé, et du temps.

Une analyse sérieuse des actifs dérivés nécessite donc une bonne compréhension du comportement des fonctions de variables aléatoires.

Un résultat important dans ce domaine a été établi par le mathématicien Kiyosi Itô en 1951. Ce résultat est connu sous le nom de "lemme d'Itô"

Le lemme d'Itô - Énoncé

Supposons que la valeur d'une variable x suive un processus d'Itô de paramètres $\mu(x,t)$ et $\sigma(x,t)$

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dz$$

Le lemme d'Itô montre qu'une fonction G de x et t est caractérisée par le processus suivant

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\mu(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2(x,t)\right) dt + \frac{\partial G}{\partial x}\sigma(x,t)dz$$

où z est le même processus de Wiener standard que dans dx.

Ainsi, **G suit également un processus d'Itô** de paramètres $\frac{\partial G}{\partial x}\mu(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2(x,t)$ et $\frac{\partial G}{\partial x}\sigma(x,t)$

Démonstration : Développement de Taylor, en utilisant le fait que $\delta z = \epsilon\sqrt{\delta t}$

Le lemme d'Itô - Application

Dans le cas des actions, on a vu que $dS = \mu S dt + \sigma S dz$.
En appliquant le lemme d'Itô, on déduit que le processus suivi par une fonction G de S et de t est défini par

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

Notez que S et G sont affectés par la même source d'incertitude sous-jacente z. Cette remarque est fondamentale pour établir le résultat de Black-Scholes.

Exemple : Considérons un contrat forward ne versant pas de dividendes. Supposons que le taux d'intérêt est constant et égal à r. On sait que $F_0 = S_0 e^{rT}$ où F_0 représente le prix forward à la date t=0, S_0 le cours de l'action à la même date et T est le temps à courir jusqu'à l'échéance du contrat.

Nous nous intéressons à l'évolution du contrat forward dans le temps. Notons F et S les valeurs respectives du forward et de l'action à une date quelconque t, avec $t < T$. La relation entre F et S est alors:

$$F = Se^{r(T-t)}$$

En supposant que S suive le processus habituel, on peut utiliser le lemme d'Itô pour déterminer le processus suivi par F. On a

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}$$

Ainsi d'après le lemme d'Itô

$$dF = \left[e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)}\right] dt + e^{r(T-t)}\sigma S dz$$

Soit, en utilisant $F = Se^{r(T-t)}$:

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma F dz$$

Comme le cours de l'action S, la valeur du forward suit un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dF}{F} = (\mu - r)dt + \sigma dz$$

Son espérance de taux de croissance est égale à $\mu - r$ (plutôt qu'à μ). Le taux de croissance de F représente donc la partie de la rentabilité de S en excès du taux sans risque.

La propriété de log-normalité

Soit S tel que $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$ et $G = \ln(S)$. Alors

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

et d'après le lemme d'Itô, le processus suivi par G s'écrit

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$$

$\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et σ sont des constantes donc G suit donc un processus de Wiener $\Rightarrow$ la variation de $\ln(S)$ entre la date 0 et n'importe quelle date T suit une normale $\mathcal{N}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T})$, c-à-d

$$\begin{aligned} \ln(S_T) \; - \; \ln(S_0) &\sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma\sqrt{T}\right) \text{, ou} \\ \ln(S_T) \; &\sim \; \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma\sqrt{T}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ S_T (le cours de l'action) suit une loi log-normale