Chapitre 17
Le modèle de Black et Scholes

Introduction

- Au début des 70's, Black, Scholes et Merton ont opéré une avancée majeure en matière d'évaluation d'options
- Ces contributions et leurs développements sont à l'origine du célèbre modèle de Black et Scholes
- qui a eu un très grand impact sur les méthodes utilisées par les traders, tant en matière d'évaluation d'option que dans la mise au point de couverture
- Ces travaux ont aussi été le point de départ du développement spéctaculaire de l'ingénierie financière dans les 80's et 90's
- En 1997, Merton et Scholes ont été récompesés par le prix Nobel d'économie (Black était décédé)

Propriété de la loi log-normale appliquée au cours des actions

- Le modèle de comportement des cours d'actions utilisé par Black, Scholes et Merton suppose que dans un court intervalle de temps les variations en pourcentage des cours des actions sont distribuées selon une loi normale

$$\frac{\delta S}{S} \sim \mathcal{N}(\mu \delta t, \sigma \sqrt{\delta t})$$

- On a vu dans le chapitre précédent qu'un tel modèle conduisait à la log-normalité du cours de l'action :

$$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}\left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma \sqrt{T}\right]$$

Exemples

Exemple 1 : Soit une action cotée initialement 40€ dont l'espérance de rentabilité est 16% et la volatilité 20% par an. D'après l'équation précédente la distribution de probabilité du cours de cette action, S_T, dans six mois est caractérisée par :

$$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}(3,759; 0,141)$$

D'après les propriétés de la loi normale, avec une proba de 95% une variable normalement distribuée se situe entre +/- 1,96 fois son écart-type autour de la moyenne. Ainsi, en considérant un intervalle de confiance de 95%, on a

$$\begin{array}{rcl} 3,759 - 1,96x0,141 < & \ln(S_T) & < 3,759 + 1,96x0,141 \\ e^{3,759-1,96x0,141} = 32,55 < & S_T & < e^{3,759+1,96x0,141} = 56,56 \end{array}$$

Il y a donc 95% de chance pour que, dans six mois, le cours de cette action se situe entre 32,55€ et 56,56€

Exemple 2 : Considérons une action cotant 20€, caractérisée par une espérance de rentabilité annuelle de 20% et une volatilité annuelle de 40%. Calculez le cours expéré de l'action, $\mathbb{E}(S_T)$ ainsi que la variance $Var(S_T)$, attendus dans un an.

On a vu (TD 7) que si $\ln(X) \sim N(m, s)$ alors $\mathbb{E}(X) = e^{m+\frac{s^2}{2}}$ et $Var(X) = e^{2m+s^2}(e^{s^2} - 1)$

Ainsi, dans le cas des actions, on a $\mathbb{E}(S_T) = S_0 e^{\mu T}$ et $Var(X) = S_0^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$

Et dans l'exemple particulier : $\mathbb{E}(S_T) = 20e^{0,2x1} = 24,43$ et $Var(X) = 400e^{2x0,2x1}(e^{0,4^2x1} - 1) = 103,54$.

L'écart-type annuel du prix de cette action est donc $\sqrt{103,54} = 10,18$

L'EDP de Black-Scholes-Merton

- l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes-Merton doit être vérifiée par tout produit dérivé lié à une action ne versant pas de dividendes
- elle repose sur un raisonnement d'arbitrage comparable à celui utilisé dans le modèle CRR
- il s'agit de construire un portefeuille sans risque consistant en une position sur le produit dérivé et une position sur l'actif sous-jacent
- En l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'espérance de rentabilité du portefeuille doit être égal au taux sasn risque, r

Hypothèses

- Le cours de l'action suit un pocessus de Wiener géométrique : $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$
- Pas de restriction sur les ventes à découvert. Le produit des ventes est immédiatement et intégralement disponible.
- Pas de frais de transactions ou d'impôts. Tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles
- Pas de dividendes sur le sous-jacent pendant la durée de vie de l'actif dérivé
- Pas d'opportunités d'arbitrage
- Le marché fonctionne en continu
- Le taux sans risque, r, est constant et fixe quelle que soit la maturité du produit dérivé.

L'EDP de Black-Scholes-Merton : Enoncé

Soit S une action dont le cours suit un processus de Wiener géométrique : $\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \delta z$. Soit f le prix d'un dérivé lié à S (et donc fonction de S et t). D'après le Lemme d'Itô :

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \delta z$$

où δS et δf représentent les variations de f et S pendant un court intervalle de temps de longueur δt.

Rappel : f et S sont gouvernés par le même processus de Wiener, càd que les $\delta z (= \epsilon \sqrt{\delta t})$ dans les équations de δS et δf sont identiques

$\Rightarrow$ En choisissant un portefeuille composé d'une action et de l'un de ses produits dérivés, la composante aléatoire peut être éliminée

Un portefeuille approprié peut-être défini de la façon suivante

- vente d'une unité du produit dérivé
- achat de $\frac{\partial f}{\partial S}$ actions

La valeur du portefeuille, notée Π, s'écrit alors

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

La variation $\delta\Pi$ de la valeur du portefeuille au cours d'un intervalle de temps δt est donnée par

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= -\delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\delta S \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\delta t \end{aligned}$$

Pas d'expression en $\delta z \Rightarrow$ le portefeuille est sans risque pendant l'intervalle $\delta t \Rightarrow$ il doit avoir la même rentabilité que le taux sans risque : $\delta\Pi = r\Pi\delta t$

Soit, en remplaçant Π et $\delta\Pi$ par leur valeur :

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\delta t = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\delta t$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf}$$

Cette équation est appelée l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton. Elle a plusieurs solutions correspondant à tous les produits dérivés qui peuvent avoir S comme actif sous-jacent. La solution de l'équation dépend alors des conditions aux bornes qui caractérisent le produit dérivé considéré. Par exemple, dans le cas d'un call européen, la condition aux bornes est :

$$f = \max(S - K; 0) \text{ , quand } t = T$$

La formule de Black et Scholes

La résolution de l'EDP de Black-Scholes-Merton dans le cas d'un call ($c_t = \max(S - K, 0)$, quand t=T) ou d'un put ($p_t = \max(K - S, 0)$, quand t=T), donne comme valeur des options (européenne qui ne verse pas de dividende) à la date 0

$$
\begin{aligned}
c_0 &= S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\
p_0 &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \\
\text{où} \quad d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

et où $N(x)$ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite

On peut par ailleurs retrouver la valeur d'un call européen :

- en prenant la limite du modèle CRR quand $\Delta T \rightarrow 0$ et en utilisant le TCL , ou
- en utilisant la méthode d'évaluation risque-neutre c'est-à-dire en considérant que la prix d'un call correspond à son espérance de rendement futur actualisé :

$$c_0 \;=\; e^{-rT} E(\max(S_T - K, 0)) = e^{-rT} E(S_T - K)^+$$

cf. démonstration au tableau