Chapitre 2
Le calcul des probabilités

Equiprobabilité et Distribution Uniforme

- Deux événements A et B sont dits **équiprobables** si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$
- Si il y a équiprobabilité sur Ω, cad si tous les événements élémentaires ont la même probabilité. On parlera alors de **distribution de probabilité uniforme**

Definition

On appelle **distribution uniforme** sur Ω la fonction de distribution qui assigne la même valeur à tous les événements élémentaires. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, la distribution de probabilité uniforme s'écrit $p(\omega) = \frac{1}{n}$, $\forall \omega \in \Omega$

Remarque : On a bien alors $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = n.\frac{1}{n} = 1$

Probabilité de Laplace

Si la distribution de probabilités sur Ω est uniforme, la probabilité d'un événement E est défini par

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)}$$

où card(E) représente le cardinal de E c'est à dire le nombre d'événements élémentaires contenus dans E

Remarque : On a bien

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si $A \cap B = \emptyset$ (car alors card$(A \cap B)$=0)

Exemple

On lance deux dés et on fait la somme des résultats. Soit E="le total est 7". Quelle est la probabilité de E?

- Si on choisit comme evt élémentaires la somme : $\Omega = \{2, 3, ..., 12\}$, la distribution n'est pas uniforme (une seule manière d'obtenir 2, plusieurs d'obtenir 7)
- Prenons comme univers les couples de résultats : $\Omega = \{(i, j), 1 \geq i \geq 6, 1 \geq j \geq 6\}$
  Alors la distrib est uniforme et $\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$ (arbre)
  $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
  $\Rightarrow \text{card}(E) = 6$ et $\mathbb{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Problème : Comment calculer les cardinaux dans des problèmes plus compliqués (loto foot, tiercé, jeux de carte)?

Dénombrements

On considère une expérience

- à plusieurs étapes
- telle que le nb d'issues m à l'étape n ne dépend pas du résultat des étapes précédentes
- le nb d'issues m peut différer selon les étapes
- on cherche le nb de manières dont l'exp peut se dérouler

Soit une tâche qui se déroule en r étapes. Si

- il y a n_1 façons de réaliser la première étape,
- pour chaque des ces n_1 façons, on a n_2 possibilités
- ... et ainsi de suite jusqu'à n_r

Alors **le nombre total de façons dont cette tache peut se dérouler est donné par le produit** $N = n_1.n_2.n_3 \ldots n_r$

Listes

Definition

Soit E un ensemble de n éléments. Une p-liste de E est une collection **ordonnée** de p éléments de E: $x_1, x_2, ..., x_p$; $x_i \in E$ $\forall i$

Remarques

- on tient compte de l'ordre
- un même élément peut revenir plusieurs fois

Exemple type : Tirage avec remise: Une urne contient 10 boules numérotées. On extrait 3 boules, avec remise après chaque tirage. Le résultat est une 3-liste de $\{1, 2, ..., 10\}$

Autres exemples :

- une grille de loto-foot est une 16-liste de $\{1, N, 2\}$
- un code PIN à 4 chiffres est une 4-liste de $\{1, 2, ..., 9\}$

Théorème 2.1

Il existe n^p p-listes de E (où $n = \text{card}(E)$)

(on utilise la formule $N = n_1.n_2...n_p$ avec $n_1 = n_2 = ... = n_p$)

Exemples

- il y a $10^3 = 10.000$ tirages (de 10 boules avec remise) possibles (cf. arbre)
- il y a $3^{16} = 43.046.721$ grilles de loto foot possibles
- il y a $9^4 = 6.561$ codes PIN à 4 chiffres possibles

Arrangements

Definition

Soit E un ensemble de n éléments. Un p-arrangement de E est une collection **ordonnée** de p éléments **distincts** de E ($p \leq n$): $x_1, x_2, ..., x_p$; $x_i \in E$ $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

Remarques

- on tient compte de l'ordre
- un même élément ne peut pas revenir plusieurs fois

Exemple type : Tirage sans remise: Une urne contient 10 boules numérotées. On extrait 3 boules, sans remettre les boules tirées. Le résultat est une 3-arrangement de $\{1, 2, ..., 10\}$

Autres exemples : Le tiercé gagnant dans une course à 18 chevaux est un 3-arrangement de $\{1, 2, ..., 18\}$

Théorème 2.2

Il existe $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E

(on utilise la formule $N = n_1.n_2...n_p$ avec $n_{i+1} = n_i - 1$
$\Rightarrow n_i = n - i + 1$)

Definition

Soit k un entier positif. La factorielle de k (ou factorielle k), noté $k!$ est défini par $k! \equiv k(k-1)(k-2)...1 = \prod_{i=1}^{k} i$.

Par convention $0! = 1$

Exemples : $1! = 1$; $2! = 2x1 = 2$; $3! = 3x2x1 = 6$

Propriété : $p.(p-1)! = p!$

Ainsi,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = n(n-1)...(n-p+1)$$

Cas particulier: si $p = n$ (classement complet dans l'ordre), $A_n^p = n!$ et on parle de **permutation** de E (une permutation est donc un n-arrangement)

Exemples

- Il y a $A_{10}^3 = 10x9x8 = 720$ tirages (de 10 boules sans remise) possibles (cf. arbre)
- Il y a $A_{18}^3 = 18x17x16 = 4896$ tiercés dans l'ordre possibles

Application : Si équiprobabilité

- proba de toucher le tiercé dans l'ordre$=\frac{1}{4896} = 0,02\%$
- proba de toucher le tiercé dans le désordre$=\frac{5}{4896} = 0,10\%$ ((acb);(bac);(bca);(cab);(cba))

Combinaisons

Definition

Soit E un ensemble de n éléments. Une p-combinaison est une collection **non ordonnée** de p éléments **distincts** de E $(p \leq n)$

Remarques

- on ne tient pas compte de l'ordre
- un même élément ne peut pas revenir plusieurs fois

Exemple type : Tirage du loto. C'est une 6-combinaison de $\{1, 2, ..., 49\}$

Autres exemples :

- Un tiercé, dans le désordre, d'une course à 18 chevaux est une 3-combinaison de $\{1, 2, ..., 18\}$
- une "main" au poker (tirage de 5 cartes) est une 5-combinaison de l'ensemble des 32 cartes

Théorème 2.3

Il existe $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ p-combinaisons de E

Remarque

- C_n^p est aussi appelé "coefficient binomial" et est parfois noté

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

- $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{\text{"arrangements de p éléments"}}{\text{"permutation des p éléments"}}$ $(C_n^n = 1)$

Exemples:

- il y a $C_{49}^6 = \frac{49!}{43!6!} = 13.983.816$ tirages possibles du loto
- il y a $C_{18}^3 = \frac{18!}{15!3!} = \frac{18x17x16}{3x2x1} = 816$ tiercés possibles dans le désordre
- il y a $C_{32}^5 = 201.376$ mains possibles dans un jeu de 32 cartes

Propriétés des combinaisons

Propriété 1 (symétrie)

$C_n^p = C_n^{n-p}$

Interprétation

- C_n^p=nb de façons d'extraire p elmts d'un ens de n elmts
- C_n^{n-p}=nb de façons de laisser p elmts dans ens de n elmts

Propriété 2 (Triangle de Pascal)

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$

Exemple

- C_{49}^6 tirages possibles du Loto
- C_{48}^6 tirages possibles ne contenant pas la boule 1
- C_{48}^5 tirages possibles contenant la boule 1

$\Rightarrow$ nécessairement $C_{48}^5 + C_{48}^6 = C_{49}^6$

Ensemble des parties: $\mathscr{P}(E)$

Definition

Soit E un ensemble de n éléments. L'ensemble des parties de E est alors défini par $\mathscr{P}(E) = \{A / A \subset E\}$

Exemples

- $E = \emptyset$, $\text{card}E = 0$, $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset\}$, $\text{card}\mathscr{P}(E) = 1$
- $E = \{a\}$, $\text{card}E = 1$, $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $\text{card}\mathscr{P}(E) = 2$
- $E = \{a, b\}$, $\text{card}E = 2$, $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\text{card}\mathscr{P}(E) = 4 = 2^2$

Théorème 2.4

$\text{card}\mathscr{P}(E) = 2^n = 2^{\text{card}E}$

"Démonstration" $\mathscr{P}(E) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$

$+$ Binôme de Newton: $(a+b)^n = C_n^o a^n b^0 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n a^0 b^n$

Permutations d'objets partiellement indiscernables

Soit n objets que l'on décompose en p groupes:
$n = n_1 + n_2 + ... + n_p$.

A l'intérieur de chaque groupes les objets sont indiscernables.

Le nombre de permutations de ces objets est $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$

Exemples

- De combien de façon peut-on aligner 3 boules rouges, 2 vertes et 5 bleues? $\frac{10!}{5!3!2!} = 2520$
- Combien de "mots" de 6 lettres peut-on former avec les lettre S, R, R, E, E, E? $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$

Probabilités Subjectives : Les Paris

Problême : Les distributions de probabilités ne sont pas toujours uniformes et on ne peut pas toujours définir des probabilités objectives!

Exemples Probabilité que le TéFéCé batte l'OM ou qu'un actif soit en hausse.

On peut toutefois connaître les probabilités subjectives que chaque individu attache à ces événements à l'aide des paris!

Si je suis prêt à payer 2 euros si Toulouse gagne pour recevoir 1 euro quand Marseille gagne, cela signifie que je pense que la probabilité que Marseille gagne est $2/3$

Plus généralement,

- paris à r contre 1 que l'événement E se réalise.

$\Leftrightarrow$ E a r fois + de chance de survenir que de ne pas survenir, cad $\mathbb{P}(E) = r\mathbb{P}(\overline{E})$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(E) = \frac{r}{r+1}$ (car $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\overline{E}) = 1$)

- Cas général d'une côte à r contre s: $\mathbb{P}(E) = \frac{r/s}{r/s+1} = \frac{r}{r+s}$

- Si on connait la proba $\mathbb{P}(E) = p$, on a $r/s = \frac{p}{1-p}$