Chapitre 3

Événements indépendants et Probabilités conditionnelles

Indépendance

Definition

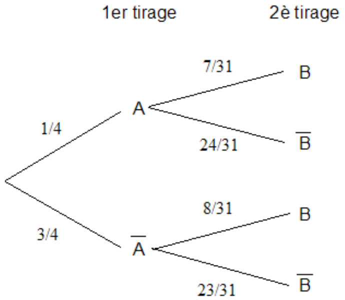
Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

Attention : Ne pas confondre indépendants et disjoints! (A et B sont disjoints si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, cad $A \cap B = 0$)

Exemple 1

- On tire au hasard, dans un jeu de 32 cartes non truqué, une carte, puis sans la remettre, une autre. Soit
  A: "la première carte tirée est un coeur"
  B: "la seconde carte tirée est un coeur"
  Les évenements A et B sont-ils indépendants?
  - $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
  - $\mathbb{P}(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$; $\text{card}(B)$ dépend de la première étape

- Si A alors $\text{card}(B) = 7$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{31}$
- Si $\overline{A}$ alors $\text{card}(B) = 8$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{8}{31}$



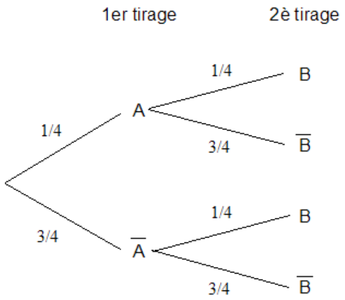
$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{4}x\frac{7}{31} = \frac{7}{124}$$
$$\mathbb{P}(A\cap \overline{B}) = \frac{1}{4}x\frac{24}{31} = \frac{6}{31}$$
$$\mathbb{P}(\overline{A}\cap B) = \frac{3}{4}x\frac{8}{31} = \frac{6}{31}$$
$$\mathbb{P}(\overline{A}\cap \overline{B}) = \frac{3}{4}x\frac{23}{31} = \frac{69}{124}$$

Rq : $\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap \overline{B})+\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)+\mathbb{P}(\overline{A}\cap \overline{B}) = 1$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\right) = \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(\overline{A}\cap B) = \frac{7}{124}+\frac{6}{31} = \frac{1}{4}$$

$\mathbb{P}(A\cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Rightarrow$ A et B ne sont pas indépendants

Avec remise, on a



$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} x \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Rightarrow$ A et B sont indépendants

Exemple 2 :

- Soit une famille de deux enfants. A="la famille a des enfants des 2 sexes", B="la famille a, au plus, une fille". A et B sont-ils indépendants?

$\Omega = \{(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)\}$ (equiprobabilité)

$A = \{(F,G),(G,F)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$B = \{(F,G),(G,F),(G,G)\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$
$(\overline{B} = \{(F,F)\})$

$A \cap B = A \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
$\Rightarrow$ A et B ne sont pas indépendants

- Même question avec 3 enfants.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(F,F,F),(F,F,G),(F,G,F),(F,G,G),\\ &\quad (G,F,F),(G,F,G),(G,G,F),(G,G,G)\}\end{aligned}$$

$\overline{A} = \{(F,F,F),(G,G,G)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$B = \{(F,G,G),(G,F,G),(G,G,F),(G,G,G)\} \Rightarrow$
$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{(F,G,G),(G,F,G),(G,G,F)\}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
$\Rightarrow$ A et B sont indépendants
(ceci est uniquement vrai pour n=3)

Remarques

1. Pour tout événement A, A et Ω sont indépendants
   $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\Omega)$
2. Soient A et B deux événements non impossibles. Si A et B sont disjoints, alors A et B ne sont pas indépendants.
   $A \cap B = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
   car A et B ne sont pas impossibles
3. Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{\text{B}}$ le sont aussi.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})) \\
&\quad \text{car } (A \cap B) \text{ et } (A \cap \overline{B}) \text{ sont disjoints} \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\
&\quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$
$\Rightarrow$ A et $\overline{\text{B}}$ sont indépendants

Généralisation

Definition

Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont **mutuellement indépendants** si $\forall p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq p \leq n$ et pour toute collection de p événements $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ip}$ on a $\mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ip}) = \mathbb{P}(A_{i1})\mathbb{P}(A_{i2})...\mathbb{P}(A_{ip})$

Remarque: il y a $C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 2^n - C_n^1 - C_n^0$ $= 2^n - n - 1$ conditions à vérifier

Cas particulier : Trois événements A, B et C sont mutuellement indépendants si : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Probabilité conditionnelle

Definition

Soient A et B deux événements d'une même épreuve et B un événement non impossible ($\mathbb{P}(B) \neq 0$). On appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant (que l'événement) B (s'est réalisé), notée $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \text{ sachant } B)$, la probabilité $\dfrac{\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbb{P}(\mathbf{B})}$

Remarques

1. Si A et B sont indépendants
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$
2. $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A \mid B)\dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$

Dans les exemples précédents:

- Jeu de carte sans remise
  - $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{7/124}{1/4} = \frac{7}{31}$
  - $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{7/124}{1/4} = \frac{7}{31}$
- Famille de 2 enfants
  - $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$
  - $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/2}{1/2} = 1\ (A \subset B)$
- 9 boules numérotées dans une urne ; A="le n° tiré est un multiple de 3" ; B="le n° tiré est impair"
  - A=$\{3,6,9\} \Rightarrow$ card(A)=3 $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$
  - B=$\{1,3,5,7,9\} \Rightarrow$ card(B)=5 $\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{5}{9}$
  - $A \cap B = \{3,9\} \Rightarrow$ card$(A \cap B)$=2 $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{9}$
  - $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2}{5}$
  - $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2}{3}$

Formule des probabilités totales

Théorème

Soit $(A_i)_{i=1..n}$ une collection d'événements non impossibles formant une partition de Ω. Alors pour tout événement B de Ω:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Corralaire

Soit A un événement de Ω tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Alors pour tout événement B de Ω:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})$$

Exemple : Une compagnie d'assurance a deux catégories de clients :

- les jeunes conducteurs qui ont une probabilité d'accident de 40% (sur 5 ans)
- les autres, dont la probabilité d'accident est 20%

Les jeunes conducteurs représentent 30% de la clientèle de la compagnie. Quelle est la probabilité d'avoir un accident pour un client quelconque?

Soit A l'événement "avoir un accident" et J l'événement "être un jeune conducteur". Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \mid J)\mathbb{P}(J) + \mathbb{P}(A \mid \overline{J})\mathbb{P}(\overline{J}) \\ &= 0,4x0,3 + 0,2x0,7 = 0,26 \end{aligned}$$

Formule de Bayes

Formule de probabilité des causes.

Exemple : Un labo commercialise un test médical

- le test est positif chez 95% des personnes atteintes (5% de "faux négatifs")
- le test est négatif chez 99% des personnes saines (1% de "faux positifs")

La maladie touche 0,5% de la population. Une personne passe le test et le résultat est positif. Quel est la probabilité qu'elle soit atteinte?

Formule de Bayes

Théorème

Soient A et B deux événements non impossibles. Alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}$$

Dans l'exemple, en définissant A="la personne est atteinte" et B="le test est positif", on a $\mathbb{P}(A) = 0,005$ $\mathbb{P}(B \mid A) = 95\%$ et $\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = 0,01$. Ainsi

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{0,95x0,005}{0,95x0,005 + 0,01x0,995} \simeq 0,32$$

Formule de Bayes

Généralisation

Soit $(A_i)_{i=1..n}$ une collection d'événements non impossibles formant une partition de Ω. Alors pour tout événement B non impossible:

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Formule des probabilités composées

Formule des probabilités composées

Soit $(A_i)_{i=1..n}$ une collection d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ &\quad \ldots\mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})\end{aligned}$$

Cas particuliers :

- n=2 : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)$ (déf proba cond)
- n=3 : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$
  $= \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)$

Exemples :

- Soit un jeu de 32 cartes. On tire les cartes une par une et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer le 1^{er} as au $3^{\text{ème}}$ tirage?

  On note A_i="on obtient un as au i^{me} tirage". On cherche alors $E = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$. On a donc:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})\mathbb{P}(A_3 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= \frac{28}{32} x \frac{27}{31} x \frac{4}{30} = \frac{63}{620} \simeq 0,10\end{aligned}$$

- On a un trousseau de n clefs. Une seule ouvre la porte. On essaye chaque clef (une fois) jusqu'à ouvrir la porte. Quel est la probabilité que la $k^{\text{ème}}$ clef ouvre la porte?

  On note A_i="le i^{me} essai est un échec". On cherche alors $E = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\
&\quad ...\mathbb{P}(A_{k-1} \mid A_1 \cap ... \cap A_{k-2})\mathbb{P}(\overline{A_k} \mid A_1 \cap ... \cap A_{k-1}) \\
&= \frac{n-1}{n} x \frac{n-2}{n-1} x \frac{n-3}{n-2} ... \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} x \frac{1}{n-(k-1)} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$