Chapitre 4

Espérance, Variance et Espérance Conditionnelle

Variables Aléatoires et Fonctions indicatrices

Rappel

Une fonction à valeurs réelles $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie sur un univers fini Ω est appelé **variable aléatoire**

Definition

Soit A un événement de Ω. La fonction $\mathbb{1}_A$ définie par:

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

est appelée **fonction indicatrice** de A

Remarque : Une fonction indicatrice est une variable aléatoire

L'espérance d'une variable aléatoire

Definition

Soi X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$. L'**espérance** (ou valeur espérée ou moyenne) de X est alors définie par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$$

Si X prend m valeurs distinctes $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

c-a-d une somme pondérée des valeurs de X, le poids de chaque valeur correspondant à sa probabilité d'occurrence.

L'espérance de X est aussi parfois noté μ_X

Théorème

- soient X une v.a. et $a, b \in \mathbb{R}$, alors
  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

- soient X et Y deux v.a. alors
  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

- soient X une v.a. et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(X(\omega_i))\mathbb{P}(\omega_i)$$

  ou

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple Considérons une option dont le prix actuel est 100€ et dont le prix à la date T dépend de l'état de l'économie, qui peut être dans un des 4 états suivant : $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Les probabilités de ces différents états sont données par :
$\mathbb{P}(e_1) = 0,2$, $\mathbb{P}(e_2) = 0,3$, $\mathbb{P}(e_3) = 0,3$ et $\mathbb{P}(e_4) = 0,2$

La v.a. X="prix de l'option à la date T" est définie par :
$X(e_1) = 99$, $X(e_2) = 100$, $X(e_3) = 101$ et $X = 102$

En achetant une option aujourd'hui, le rendement espéré à la date T est :

$$\mathbb{E}(X) = 99(0,2) + 100(0,3) + 101(0,3) + 102(0,2) = 100,5$$

Ainsi le profit espéré vaut
$\mathbb{E}(\pi) = \mathbb{E}(X - 100) = 100,5 - 100 = 0,5$

Considérons un dérivé de X dont le rendement D est une fonction du prix de l'option. Par exemple

$D(99) = -4$, $D(100) = 5$, $D(101) = 5$ et $D(102) = -6$.
D est ainsi une v.a. de Ω et le rendement espéré du dérivé

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathit{rendement}) &= D(99)\mathbb{P}(99) + D(100)\mathbb{P}(100) + \\
&\quad D(101)\mathbb{P}(101) + D(102)\mathbb{P}(102) \\
&= -4(0,2) + 5(0,3) + 5(0,3) - 6(0,2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Variance et écart type

L'espérance de X est une mesure du "centre" de la distribution de X. On parle d'ailleurs de variable aléatoire centrée si $E(X) = 0$ (on peut toujours centrer une v.a. : $\overline{X} = X - E(X)$ $\Rightarrow E(\overline{X}) = 0$).

Une mesure de l'"étalement" des valeurs d'une v.a. est la variance et sa racine carré, l'écart type. L'avantage de l'écart type est qu'il est exprimé dans la même unité que la variable.

Definition

Soit X une variable aléatoire d'espérance finie μ.
La **variance** de X est alors défini par :

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$$

et l'**écart type** est la racine carrée (positive) de la variance:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Principales propriétés de la variance

1. $$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i)^2 \mathbb{P}(X = x_i) - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \right]^2$$
(formule de Koenig)

2. $\forall a \in \mathbb{R},\ Var(aX) = a^2 Var(X)$

3. $\forall c \in \mathbb{R},\ Var(X + c) = Var(X)$

Attention : L'opérateur variance n'est pas linéaire
$Var(aX + bY) \neq aVar(X) + bVar(Y)$ en général

L'importance de la variance

Dans l'exemple précédent on a $\mathbb{E}(X) = 100,5$ et:

$$\begin{aligned} Var(X) &= 0,2(99-100,5)^2 + 0,3(100-100,5)^2 + \\ &\quad 0,3(101-100,5)^2 + 0,2(102-100,5)^2 \\ &= 1,05 \\ \sigma_X &\simeq 1,025 \end{aligned}$$

Imaginons maintenant
$X(e_2) = X(e_3) = X(e_4) = 110$ et $X(e_1) = 62,5$
Alors, on a toujours $\mathbb{E}(X) = 100,5$ mais:
$Var(X) = 0.8(110-100,5)^2 + 0.2(62,5-100,5)^2 = 361$
$\sigma_X = 19$

$\Rightarrow$ La variance est une (première) mesure du risque

Centrer et réduire une variable

Definition

Une variable aléatoire dont la variance est égale à 1 est dite **réduite**

Soit X une v.a.r. quelconque. On peut toujours contruire à partir de X une v.a.r. centrée-réduite $Y = \frac{X-E(X)}{\sigma_X}$(si $\sigma_X \neq 0$)

Démonstration

- $$E(Y) = E\left[\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X} E\left[X - E(X)\right] = \frac{1}{\sigma_X}\left[E(X) - E(X)\right] = 0 \Rightarrow \text{Y centrée}$$
- $$Var(Y) = Var\left[\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right] = \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 Var\left[X - E(X)\right] = \frac{1}{Var(X)} Var(X) = 1 \Rightarrow \text{Y réduite}$$

Espérance Conditionnelle

En rassemblant les notions de probabilité conditionnelle et d'espérance, on obtient le concept d'**espérance conditionnelle**, qui joue un rôle important dans les modèles de valorisation ("pricing") de produits dérivés.

Le calcul de l'espérance conditionnelle d'une variable par rapport à un événement (non impossible) A est plutôt simple. Il suffit de prendre l'espérance "ordinaire" mais par rapport à la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$ définie par $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A)$

Definition

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement non impossible. L'**espérance conditionnelle** d'une v.a. X par rapport à l'événement A est: $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_A}(X)$

Théorème

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid A) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X.\mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Démonstration

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_A}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i \mid A) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\frac{\mathbb{P}(\omega_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i \cap A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{1}_A(\omega_i)\mathbb{P}(\omega_i)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\mathbb{E}(X.\mathbb{1}_A)$$

Corrolaire

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$, alors $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_A}(X \mid B) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid A \cap B)$; $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$

Théorème

Soit $B_1, \ldots, B_n$ une partition de Ω. Pour toute v.a. X de Ω

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

De plus, si A est un événement non impossible alors

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X \mid B_i \cap A)\mathbb{P}(B_i \mid A)$$

Exemple

Dans l'exemple du jet de dé uniforme sur $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$:
$\mathbb{P}(\{2\} \mid \{2, 4, 6\}) = \frac{1/6}{3/6} = 1/3$ et $\mathbb{P}(\{2\} \mid \{1, 3, 5\}) = 0$.

Soit X la v.a représentant le résultat du lancer:
$X : \omega \in \Omega = \{1, 2, ..., 6\} \mapsto X(\omega) = \omega \in \mathbb{R}$
Dans ce cas, on a:

$$\mathbb{E}(X \mid \{2, 4, 6\}) = \sum_{x \in \{2,4,6\}} x\mathbb{P}(\{x\} \mid \{2, 4, 6\}) = (2 + 4 + 6)/3 = 4$$

$$\mathbb{E}(X \mid \{1, 3, 5\}) = \sum_{x \in \{1,3,5\}} x\mathbb{P}(\{x\} \mid \{1, 3, 5\}) = (1 + 3 + 5)/3 = 3$$

Les événements $\{1, 3, 5\}$ et $\{2, 4, 6\}$ forment une partition de Ω et surviennent chacun avec une probabilité $1/2$, on retrouve donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X \mid \{2, 4, 6\}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X \mid \{1, 3, 5\}) = 3,5$