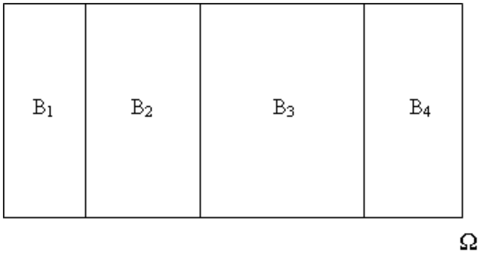
Chapitre 6
Processus Stochastiques

Rappels

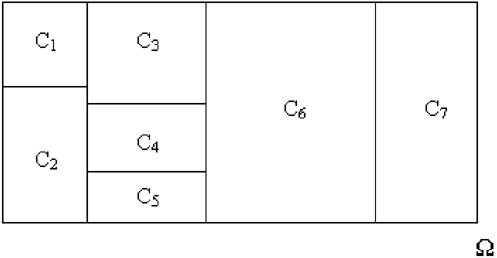
Soit Ω un ensemble non vide. Une **partition** de Ω est une collection $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_k\}$ d'ensembles non vides de Ω (appélés **blocs** de la partition) qui satisfont les propriétés suivantes :

1. les blocs sont disjoints deux à deux : $B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i, j \in \{1, ..., k\}$ $i \neq j$
2. l'union des bocs correspond à l'ensemble Ω : $B_1 \cup ... \cup B_k = \Omega$



Définition

Soit $\mathcal{P} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ une partition de Ω. Une partition $\mathcal{Q} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ obtenue en divisant certains blocs de $\mathcal{P}$, est appelée **raffinement** de $\mathcal{P}$. Ainsi $\mathcal{Q}$ est un raffinement de $\mathcal{P}$ si chaque bloc de $\mathcal{Q}$ est contenu dans un bloc de $\mathcal{P}$ ou encore si chaque bloc de $\mathcal{P}$ est l'union de blocs de $\mathcal{Q}$. On note alors $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$. On dira aussi que $\mathcal{Q}$ est plus fine que $\mathcal{P}$ ou que $\mathcal{P}$ est plus grossière que $\mathcal{Q}$.

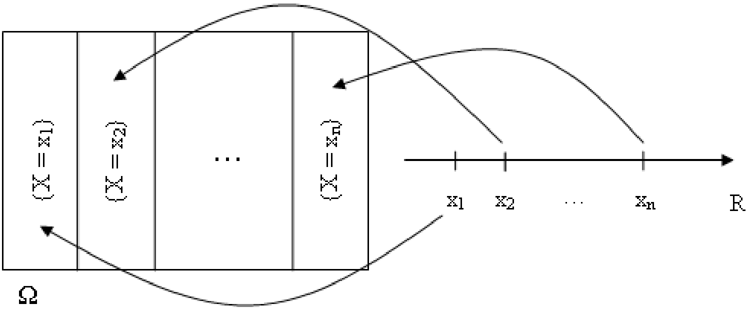


$B_1 = C_1 \cup C_2$
$B_2 = C_3 \cup C_4 \cup C_5$
$B_3 = C_6$
$B_4 = C_7$

Partition générée par une Variable Aléatoire

Rappel : l'ensemble des valeurs **distinctes** $\{x_1, ..., x_n\}$ prises par une v.a. X est appelé l'**image** de X et est noté $\text{im}(X)$.

Toute variable aléatoire finie X définie une partition $\mathcal{P}_X$, comme l'illustre le graphique suivant



Définition

Partition générée par X

Soit X une variable aléatoire de Ω avec $\text{im}(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$
Alors X définie une partition de Ω dont les blocs sont les images inverses des éléments de $\text{im}(X)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_X = \{\{X = x\} \mid x \in \text{im}(X)\} = \{\{X = x_1\}, \ldots, \{X = x_n\}\}$$

qui est appelée partition générée par X.

X est constante dans chacun des blocs de $\mathcal{P}_X$. On dira alors que X est $\mathcal{P}_X$-**mesurable**

Mesurabilité

Soit $\mathcal{P}$ une partition de Ω. Une variable aléatoire X de Ω est dite $\mathcal{P}$-**mesurable** si X est constante dans chaque bloc de $\mathcal{P}$

Théroèmes

Soit X une v.a. de Ω. Alors

1. X est $\mathcal{Q}$-mesurable ssi $\mathcal{Q}$ est un raffinement de $\mathcal{P}_X$
2. $\mathcal{P}_X$ est la partition la plus grossière pour laquelle X est mesurable
3. $\mathcal{P}_X$ est la seule partition pour laquelle X est mesurable et prend une valeur différente dans chaque bloc

Soient X et Y deux v.a. Alors Y est $\mathcal{P}_X$-mesurable ssi Y est une fonction de X c'est-à-dire ssi il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $Y = f(X)$

Définition

Soit Ω un ensemble non vide. Une collection $\mathcal{A}$ de sous ensembles de Ω est appelé **algèbre des parties** (ou simplement **algèbre**) si elle satisfait les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Remarque : On montre facilement qu'alors
$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ et
$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$

Théorème

À partir d'une partition $\mathcal{P}$ de Ω, on peut générer une algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ en considérant toutes les unions de blocs de $\mathcal{P}$

Théorème

Soit Ω un ensemble fini (non vide). Alors, pour tout partition $\mathcal{P}$ de Ω, l'ensemble

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \{C \subseteq \Omega \mid C = \emptyset \text{ ou } C = \text{union de blocs de } \mathcal{P}\}$$

est une algèbre, appelée algèbre générée par $\mathcal{P}$

Remarque : $\mathcal{A}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$

Algèbre générée par une variable aléatoire

Définition

Soit X une v.a. de Ω. L'ensemble des événements

$$\mathcal{A}_X = \{\{X \in B\} \mid B \subseteq \mathrm{im}(X)\}$$

est appelée l'algèbre engendrée par la v.a. X.

En fait $\mathcal{A}_X$ n'est rien de plus que l'algèbre générée par $\mathcal{P}_X$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}(\mathcal{P}_X)$

Mesurabilité par rapport à une algèbre

Rappel : - X mesurable par rapport à une partition $\mathcal{P}$ ssi X constant dans les blocs de $\mathcal{P}$.

- X est $\mathcal{P}$-mesurable ssi $\mathcal{P}$ est un raffinement de $\mathcal{P}_X$

Définition

Soient X une v.a. de Ω et $\mathcal{A}$ une algèbre d'événements de Ω. Alors X est $\mathcal{A}$-**mesurable** si

$$\{X \in B\} \in \mathcal{A}, \forall B \subseteq \operatorname{im}(X)$$

Ainsi, X est $\mathcal{P}$-mesurable $\Leftrightarrow$ X est $\mathcal{A}(\mathcal{P})$-mesurable

Théorème

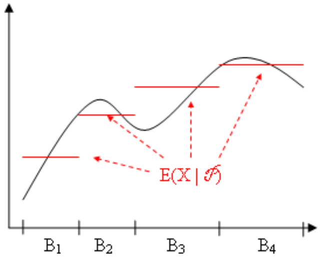
Une v.a. X de Ω est $\mathcal{A}$-mesurable ssi $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}$

Espérance conditionnelle par rapport à une partition

Attention Esp. cond. par rapport à un evt = nb réel
Esp. cond. par rapport à une partition = v.a.

Remarque : $\mathbb{E}(X)$ est la meilleure appoximation possible de X par une constante ($\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(X-c)^2\right] \, \forall c$)

On cherche ici à ce que la valeur espérée par rapport à une partition représente la meilleure approximation de X avec une évaluation constante pour chaque bloc de la partition. Pour chaque bloc B de la partition, on peut avoir une meilleure approxition constante que la valeur espérée standard. On peut en fait obtenir la meilleure approximation en utilisant l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid B)$.



Définition

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_n\}$ une partition de Ω pour laquelle $\mathbb{P}(B_i) > 0\ \forall i$. L'espérance conditionnelle d'une v.a. X par rapport à une partition est la v.a. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{P}) : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid B_1)\mathbb{1}_{B_1} + ... + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid B_n)\mathbb{1}_{B_n}$$

En particulier $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{P})(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid [\omega]_{\mathcal{P}})$, où $[\omega]_{\mathcal{P}}$ est le bloc de $\mathcal{P}$ contenant ω

Théorème

La variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P})$ est la meilleure approximation de X parmi les fonctions constantes sur les blocs de $\mathcal{P}$, cad parmi toutes les v.a. $\mathcal{P}$-mesurable. Ainsi :

$$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(X - Y)^2\right]$$

pour toute v.a. Y $\mathcal{P}$-mesurable.

Propriétés de l'espérance conditionnelle

- $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{P}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{P})$
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P})) = \mathbb{E}(X)$
- Si Y est $\mathcal{P}$-mesurable : $\mathbb{E}(YX \mid \mathcal{P}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P})$
- Si X est $\mathcal{P}$-mesurable : $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}) = X$
- Si $\mathcal{Q}$ est une partition plus fine que $\mathcal{P}$ alors: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}) \mid \mathcal{Q}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{Q}) \mid \mathcal{P})$ (on ne prend en compte que la partition la plus grossière)

- Si X et $\mathcal{P}$ sont indépendants, cad si $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{P}$ sont indépendants :

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}) = \mathbb{E}(X)$$

Définition

Les collections d'événements $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_k$ sont **indépendantes** si pour tout choix d'événements $E_i \in \mathcal{C}_i$, les événements $E_1, ..., E_k$ sont indépendants.

Remarque : Les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes ssi les partitions $\mathcal{P}(X_1), ..., \mathcal{P}(X_n)$ sont des collections d'événements indépendantes

Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit Y une variable aléatoire telle que $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_K\}$. L'espérance conditionnelle d'un v.a. X sachant Y est l'espérance conditionnelle de X par rapport à la partition $\mathcal{P}_Y$ engendrée par Y

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}_Y) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X \mid \{Y = y_i\}) \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}}$$

Processus Stochastique

Question : Comment évolue le prix d'une option dans le temps?

Considérons une séquence de temps (discrète) : $t_0 < t_1 < ... < t_N$. Si on note X_i le prix de l'option au temps t_i, ces prix sont inconnus à la date initiale t_0 et peuvent donc être considérés comme des variables aléatoires sur un espace probabilisé.

Définition

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, un **processus stochastique (fini)** est une séquence de variables aléatoires $X_1, ..., X_N$ définies sur Ω

On considère trois dates $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$ (la date initiale étant 0)

A chaque date, le marché est en expansion ou en récession. Ainsi, pour chaque période, l'"état du marché" est soit U (le marché est en expansion) soit D (le marché est en récession).

On suppose que les réalisations des états du marché sont indépendantes entre les périodes. À chaque période, la proba d'avoir U est notée p et la prob d'avoir D est $q = 1 - p$.

L'ensemble des issues de cette expérience est $\Omega = \{UUU, UUD, UDU, UDD, DUU, DUD, DDU, DDD\}$

Un élément de cet ensemble sera noté $\omega_1\omega_2\omega_3$ avec $\omega_i \in \{U, D\}$

Les réalisations aux trois dates étant supposées indépendantes, on a:

$\mathbb{P}(UUU) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(U) = p^3$

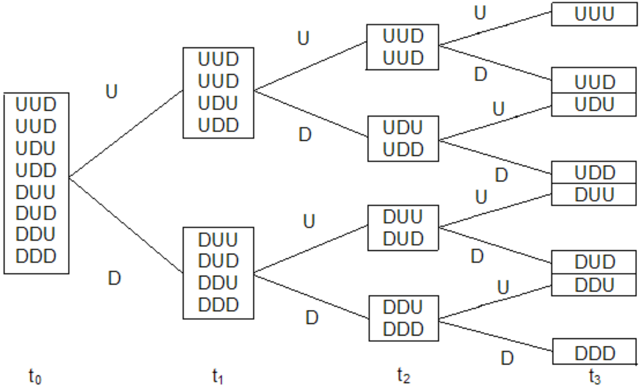
$\mathbb{P}(UUD) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(D) = p^2 q = p^2(1-p)$

...

Ainsi, par exemple:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\text{"le marché est en expansion à la date 1"}) \\
= \; & \mathbb{P}(UUU) + \mathbb{P}(UUD) + \mathbb{P}(UDU) + \mathbb{P}(UDD) \\
= \; & p^3 + p^2(1-p) + p^2(1-p) + p(1-p)^2 \\
= \; & p^2(p+1-p) + p(1-p)(p+1-p) \\
= \; & p^2 + p(1-p) = p(p+1-p) \\
= \; & p
\end{aligned}$$

Le concept de filtration



Chaque cadre (noeud de l'arbre) contient l'ensemble des états finaux encore possibles étant donné l'état actuel

En particulier, si l'état actuel est $\delta = \omega_1 ... \omega_i$, l'ensemble des états finaux encore possibles est l'ensemble de tous les états finaux ayant δ en prefixe :

$$\mathcal{F}_i(\delta) = \{\omega \in \Omega \mid [\omega]_i = \delta\}$$

où $[\omega]_i$ représente le préfixe de longueur i de ω

À chaque temps t_i, les 2^i ensembles $\mathcal{F}_i(\delta)$ forment une partition $\mathcal{P}_i$ de Ω. Par exemple $\mathcal{P}_2 = \{\mathcal{F}_2(UU), \mathcal{F}_2(UD), \mathcal{F}_2(DU), \mathcal{F}_2(DD)\}$.

Dans le cas général, $\mathcal{P}_i = \{\mathcal{F}_i(\delta_i), ..., \mathcal{F}_i(\delta_{2^i})\}$, où $\delta_i, ..., \delta_{2^i}$ représentent les 2^i éléments de l'ensemble $\{U, D\}^i$

Par ailleurs, chaque bloc $\mathcal{F}_i(\delta)$ de $\mathcal{P}_i$ est contenu dans un bloc de la partition précédente $\mathcal{P}_i$. En fait, $\mathcal{F}_i(\delta) \subseteq \mathcal{F}_{i-1}([\delta]_{i-1})$.

Ainsi $\mathcal{P}_i$ est un raffinement de $\mathcal{P}_{i-1}$ et

$$\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec \ldots \prec \mathcal{P}_N \tag{1}$$

est une séquence de partitions de plus en plus fine. On appellera une telle séquence, une **filtration**.

Notons que $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$ est la partition la plus grossière de Ω, avec un unique bloc : Ω. Au contraire, $\mathcal{P}_N = \Omega$ est la partition la plus fine, puisque chacun de ses blocs contient un unique élément : un des états finaux.

Définition

Un séquence de partitions $\mathbb{F} = (\mathcal{P}_0, ..., \mathcal{P}_N)$ d'un ensemble $\Omega = \{\omega_1, ...\omega_m\}$ pour laquelle

$$\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec ... \prec \mathcal{P}_N$$

est appelée une **filtration**

Par ailleurs, une filtration satisfaisant les propriétés suivantes est appelée une **structure d'information**:

1. $\mathcal{P}_0$ est la partition la plus grossière possible ($\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$) n'indiquant aucune information sur Ω
2. $\mathcal{P}_N$ est la partition la plus fine possible ($\mathcal{P}_N = \{\{\omega_1\}, ..., \{\omega_m\}\}$) donnant une information complète sur Ω (sur l'état final)

Probabilités

En supposant maintenant k périodes indépendantes, on peut définir une mesure de probabilité sur $\{U, D\}^k$ en posant:

$$\mathbb{P}(\delta) = p^{N_U(\delta)} q^{N_D(\delta)} = p^{N_U(\delta)} (1-p)^{N_D(\delta)}$$

où $N_U(\delta)$ et $N_D(\delta)$ représentent respectivement le nombre de U et de D dans δ

$(\{U, D\}^k, \mathbb{P})$ est alors un espace probabilisé fini

En effet, $\forall \delta \in \{U, D\}^k, 0 \leq \mathbb{P}(\delta) \leq 1$ et $\displaystyle\sum_{\sigma \in \{U,D\}^k} \mathbb{P}(\sigma) = 1$

(vrai pour k=1 puisque $p + (1-p) = 1$ puis démo par récurrence))

Variable Aléatoire Adaptée

Imaginons maintenant qu'à chaque fois que le marché est haussier, on gagne un euro et que quand le marché est baissier on perde un euro. Soit X_i la variable aléatoire représentant les gains accumulés à la période t_i.

Pour un état donné **à la période i**, les gains accumulés s'écrivent $N_U(\delta) - N_D(\delta)$. Ainsi il semble naturel de définir $X_i(\delta) = N_U(\delta) - N_D(\delta)$. Cependant les X_i sont alors définies sur des espaces différents $\{U, D\}^i$ et ne forment donc pas un **processus stochastique**

Ainsi, on définit chaque X_i sur le domaine $\{U, D\}^N$ des états **finaux** en ignorant simplement la portion de l'état final qui vient après la période t_i (cad l'"information future"). On a donc $X_i(\omega) = N_U([\omega]_i) - N_D([\omega]_i)$

De plus, sous cette définition, chaque fonction X_i est $\mathcal{P}_i$-mesurable, puisque $\forall \omega \in \mathcal{F}_i(\delta)$ on a le même $X_i(\omega) = N_U(\delta) - N_D(\delta)$. Ainsi une information sur la partition donne une information sur X_i

Pour résumer on a:

- une filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{P}_0, ...\mathcal{P}_N\}$ de Ω et,
- un processus stochastique $\mathbb{X} = (X_0, ..., X_N)$ sur Ω (avec $X_0 = 0$), pour lequel X_i est $\mathcal{P}_i$-mesurable pour tout i.

Définition

Comme X_i est $\mathcal{P}_i$-mesurable pour tout i, le processus stochastique $\mathbb{X}$ est dit **adapté** à la filtration $\mathbb{F}$ ou $\mathbb{F}$-**adapté**

Martinguales

On aimerait maintenant calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k)$, cad la valeur espérée du gain accumulé à la période $k+1$ étant donné la partition précédente (c'est à dire celle de la période k).

On peut montrer que dans notre exemple,

$$\mathbb{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) = X_k + (p-q)\mathbf{1}$$

où $\mathbf{1}$ est la variable aléatoire ont la valeur est toujours 1.

Ainsi pour $p = q = 1/2$, $\mathbb{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) = X_k$ c'est à dire que si on connait l'état du "jeu" au temps t_k, la valeur espérée des gains accumulés en t_{k+1} est égale aux gains accumulés en t_k. Dit autrement, comme $p = q$, le jeu est juste dans le sens où l'espérance de gain entre deux périodes est égale à 0.

Définition

Un processus stochastique $\mathbb{X} = \{X_0, X_1, ..., X_N\}$ est une **martinguale** par rapport à une filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec ... \prec \mathcal{P}_N\}$ (on dit aussi $\mathbb{F}$-**martinguale**) si $\mathbb{X}$ est adapté à $\mathbb{F}$ (cad si X_i est $\mathcal{P}_i$-mesurable) et si

$$\mathbb{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) = X_k$$

Ainsi, à $\mathcal{P}_i$ donné, la valeur espérée de X_{k+1} est simplement X_k. Une martinguale modélise donc des "jeux justes".

Remarque

- Cette définition implique qu'alors $\mathbb{E}(X_s \mid \mathcal{P}_t) = X_t \ \forall s > t$
- Pour être complet il est aussi nécessaire que $\mathbb{E} \mid X_t \mid < \infty$