# Chapitre 7

# Lois usuelles de probabilités discrètes

# Rappels

## Definition

Soit $X$ une variable aléatoire réelle. La **loi** de $X$ est la probabilité que $X$ prenne chacune des valeurs de son univers image.

## Loi uniforme

On dit que X suit une **loi uniforme discrète** si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $\forall x_i \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$.

Alors: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

**Cas particulier :** si $x_i = i$ alors

$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ (car $\sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$),

$\mathbb{E}(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{2}$

# Loi de Bernouilli

**Definition**

Une v.a. X suit une loi de Bernouilli si:

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$
2. $\mathbb{P}(X = 1) = p \; (\Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p)$

Typiquement, une variable suivant une loi de Bernouilli mesure le succès $(X = 1)$ ou l'échec $(X = 0)$ d'une expérience

Dans ce cas,

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $V(X) = p.q$

$$\mathbb{E}(X) = 0.\mathbb{P}(X = 0) + 1.\mathbb{P}(X = 1) = p$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2.\mathbb{P}(X = 0) + 1^2.\mathbb{P}(X = 1) = p$$
$$\Rightarrow V(X) = p - p^2 = p(1 - p) = p.q$$

# Loi Binomiale

**Idée :** On réalise $n$ fois dans les mêmes conditions une épreuve de Bernouilli (expérience aléatoire à deux issues) et on cherche la proba d'avoir $k$ "succès" sur ces $n$ épreuves.

**Ex :** On considère un marché en expension avec probabilité $p$ (en récession sinon). On observe le marché pendant 3 périodes supposées indépendantes. Soit $X$ le nombre de fois où le marché est haussier. En notant $U_i$ l'événement "le marché est en expension à la période $i$", $i = 1, 2, 3$, on a

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \overline{U_3}) = \mathbb{P}(\overline{U_1})\mathbb{P}(\overline{U_2})\mathbb{P}(\overline{U_3}) = q^3$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(U_1 \cap \overline{U_2} \cap \overline{U_3}) + \mathbb{P}(\overline{U_1} \cap U_2 \cap \overline{U_3}) + \mathbb{P}(\overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap U_3)$$
$$= p.q^2 + q.p.q + q^2.p = 3p.q^2$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(U_1 \cap U_2 \cap \overline{U_3}) + \mathbb{P}(\overline{U_1} \cap U_2 \cap U_3) + \mathbb{P}(U_1 \cap \overline{U_2} \cap U_3)$$
$$= 3p^2q$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = p^3$$

# Loi Binomiale (2)

En généralisant à $n$ périodes, on a $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

## Definition

Une v.a. X suit une loi Binomiale de paramètre $n$ et $p$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$) si

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., n\}$
2. $\forall k \in X(\Omega) : \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

On note $X \sim B(n, p)$.

Dans ce cas :

- $\mathbb{E}(X) = n.p$
- $V(X) = n.p.q$

**Démonstration de la formule de l'espérance** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 0.\mathbb{P}(X=0)+1.\mathbb{P}(X=1)+...+n.\mathbb{P}(X=n)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k.C_n^k.p^k.q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n.C_{n-1}^{k-1}.p^k.q^{n-k}\\
&\quad (\text{car } k.C_n^k = n.C_{n-1}^{k-1})\\
&= n.p.\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}.p^{k-1}.q^{n-k} = n.p
\end{aligned}$$

En effet en notant $l = k-1$, on a :
$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}.p^{k-1}.q^{n-k} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{l}.p^{l}.q^{(n-1)-l} = (p+q)^{n-1}$
d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi
$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}.p^{k-1}.q^{n-k} = 1$

# Loi de Poisson

Pour étudier des phénomènes rares comme le risque de défaut d'un crédit, on utilise la loi de Poisson appelée aussi loi des événements rares.

Cette loi repose sur le fait que $e^x = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k!}$

## Definition

Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2. $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

# Remarques

1. On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$
2. Si X suit une loi binomiale $n.p \to \lambda$ alors la loi de X tend vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
   Si $n$ est grand $(n \geq 50)$ et si $\lambda = n.p$ prend une valeur intermédiaire $(0,1 \leq \lambda \leq 5)$ alors $B(n, p)$ a des valeurs très voisines de $\mathcal{P}(\lambda)$
3. dans la pratique, la loi de Poisson s'applique à beaucoup de situations concrètes comme : le nb de véhicules passant à un péage, le nb d'appels téléphoniques reçus à un standard, le nb de défauts de fabrication dans une production, le nombre d'emprunteurs faisant défaut sur leur crédit,...

**Exemple :** On estime que le nombre de véhicules passant chaque minute à un péage donné suit $\mathcal{P}(5)$. Quelle est la proba qu'en une minute :

aucune voiture ne passe : $\mathbb{P}(X=0) = e^{-5}\frac{5^0}{0!} = e^-5 \simeq 0,67\%$

une seule voiture passe : $\mathbb{P}(X=1) = e^{-5}\frac{5^1}{1!} = 5e^-5 \simeq 3,36\%$

cinq voitures passent : $\mathbb{P}(X=5) = e^{-5}\frac{5^5}{5!} \simeq 17,34\%$

dix voitures passent : $\mathbb{P}(X=10) = e^{-5}\frac{5^{10}}{10!} \simeq 1,81\%$

vingt voitures passent : $\mathbb{P}(X=20) = e^{-5}\frac{5^{20}}{20!} \simeq 0,000026\%$

### Théorème

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda$

**Démo :**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\sum_{l=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!} = \lambda$$

# Lois du temps d'attente

## A. Loi géométrique

On réalise une succesion d'épreuves de Bernouilli (de paramètre $p$) jusqu'à obtenir un succès. Soit X le nb d'épreuve: $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}...\cap\overline{S_{k-1}}\cap S_k\right)=q^{k-1}p$

**Definition**

Une v.a. X suit une loi géométrique de paramètre $p$ si

1. $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$
2. $\forall k\in X(\Omega)$ : $\mathbb{P}(X=k)=q^{k-1}p$ avec $q=1-p$

On note $X\sim G(p)$ et on dit que X est le tps d'attente pour un succès

**Théorème**

Si $X\sim G(p)$ alors $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$ et $V(X)=\frac{q}{p^2}$

## B. Loi de Pascal

On réalise une succesion d'épreuves de Bernouilli (de paramètre $p$) jusqu'à obtenir $r$ succès. Soit X le nb d'épreuve:
Alors $X(\Omega) = \{r, r+1, ...\}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(E \cap F)$ avec
E="$r - 1$ succès dans les $k - 1$ épreuves" et F="succès à la $k^{\text{ième}}$"
$\mathbb{P}(E) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} q^{k-r}$, $P(F) = p \Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$

**Definition**

Une v.a. X suit une loi de Pascal de paramètre $r$ et $p$ si
1. $X(\Omega) = \{r, r+1, r+2, ...\}$
2. $\forall k \in X(\Omega) : \mathbb{P}(X = k) = C_{k-1}^{r-1} q^{k-r} p^r$ avec $q = 1 - p$

On note $X \sim \mathcal{P}(r, p)$ et X est le tps d'attente pour $r$ succès

**Théorème**

Si $X \sim \mathcal{P}(r, p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$ et $V(X) = \frac{r.q}{p^2}$

**Remarque :** $\mathcal{P}(1, p) = G(p)$