Chapitre 8

Introduction aux modèles de valorisation d'options en temps discret

But

On cherche à déterminer le prix initial des produits dérivés (put, call, forward,...)

Problème : On ne connait pas le prix final du produit

Pour résoudre ce problème, on fait l'hypothèse qu'on connait la distribution du prix final.

On suppose par ailleurs qu'on acquiert au fil du temps de l'information sur le prix final.

L'actif sans risque

Hypothèse clé : Il existe un actif sans risque, cad donnant un rendement certain (ex : bond du trésor)

À la période présente (t=0) on suppose que l'actif sans risque vaut 1 et qu'à chaque période il a un rendement r (le taux d'intérêt). Ainsi:
à $t = 1$ il vaut $(1 + r)$
à $t = 2$ il vaut $(1 + r) + r(1 + r) = (1 + r)(1 + r) = (1 + r)^2$
.
.
.
à $t = n$ il vaut $(1 + r)^n$

Actualisation 1/2

L'actif sans risque est utilisé comme numéraire (cad comme unité de mesure). Au lieu de compter en €, tout est exprimé en fonction de l'actif sans risque.

Considérons par exemple un investissement qui donne en un an 104 € pour un apport de 100 €. Est-ce un bon investissement? Pour le savoir on doit le comparer à une norme guarantie.

Si l'actif sans risque donne 105 € pour 100 €, l'investissement n'est pas bon. En utilisant l'actif sans risque comme unité de mesure, il est plus facile d'étudier si l'investissement est bon.

Actualisation 2/2

Si un investissement donne, pour un apport de 100 unités de numéraire, un bénéfice supérieur à 100 alors il s'agit d'un bon investissement (relativement à l'actif sans risque tout du moins)

Le prix "escompté" d'un actif S à la période t est alors donné par

$$\overline{S_t} = \frac{S_t}{(1+r)^t}$$

on parle alors de valeur actualisée ($\delta = \frac{1}{1+r}$ est appelé taux d'escompte)

Remarque : l'actif sans risque a une valeur actualisée égale à 1 à chaque période du temps

En temps continu

En temps continu, le taux d'actualisation est $e^{-r.t}$ (au lieu de $\frac{1}{(1+r)^t}$).

Alors $\overline{S_t} = e^{-r.t} S_t$ et $S_t = e^{r.t} \overline{S_t}$