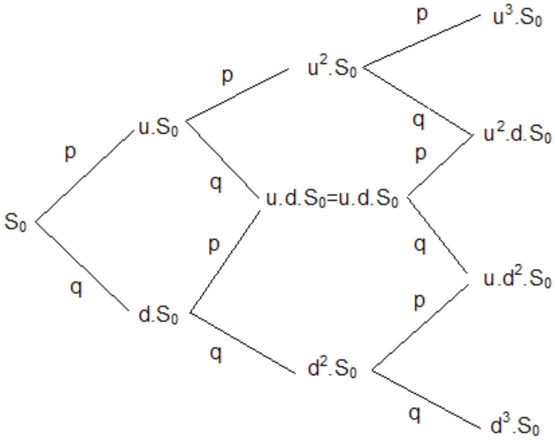
Chapitre 9
Le modèle Cox-Ross-Rubinstein

Considérons un actif valant S_0 à la période initiale et qui, à chaque période, peut être haussier (et avoir un rendement u) avec une probabilité p ou baissier (rendement d) avec une probabilité $q = (1 - p)$. Sur 3 périodes on a



L'ensembles des états finaux est
$\Omega = \{uuu, uud, udu, udd, duu, dud, ddu, ddd\}$.

Le prix de l'actif à chaque période (sauf à t=0) est une variable aléatoire.

$$S_1 = \begin{cases} S_0.u & \text{avec probabilité } p \\ S_0.d & \text{avec probabilité } (1-p) \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} S_0.u^2 & \text{avec probabilité } p^2 \\ S_0.u.d & \text{avec probabilité } 2.p.(1-p) \\ S_0.d^2 & \text{avec probabilité } (1-p)^2 \end{cases}$$

2 états finaux donnent $S_2 = u.d.S_0$: $\{ud\}$ et $\{du\}$

$$S_3 = \begin{cases} S_0.u^3 & \text{avec probabilité } p^3 \\ S_0.u^2.d & \text{avec probabilité } 3.p^2.(1-p) \\ S_0.d^2.u & \text{avec probabilité } 3.(1-p)^2.p \\ S_0 d^3 & \text{avec probabilité } (1-p)^3 \end{cases}$$

3 états finaux donnent $S_3 = u^2.d.S_0$: $\{uud\}$, $\{udu\}$ et $\{duu\}$

3 états finaux donnent $S_3 = d^2.u.S_0$: $\{ddu\}$, $\{dud\}$ et $\{udd\}$

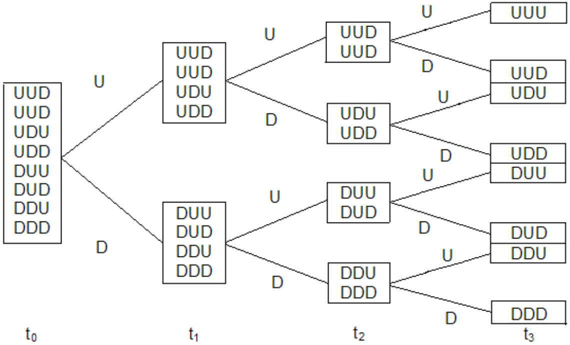
Ainsi,

$$\mathbb{E}(S_1) = p.u.S_0 + q.d.S_0 = (up + dq)S_0$$
$$\mathbb{E}(S_2) = p^2.u^2.S_0 + 2.p.q.u.d.S_0 + q^2.d^2.S_0 = (up + dq)^2 S_0$$
$$\mathbb{E}(S_3) = p^3.u^3.S_0 + 3.p^2.q.u^2.d.S_0 + 3.p.q^2.u.d^2.S_0 + q^3.d^3.S_0$$
$$= (up + dq)^3 S_0$$

Le processus de prix (S_t), $t = 0, 1, 2, 3$ est alors un processus stochastique en temps discret.
Chaque valeur S_t est une v.a. c'est à dire une fonction de Ω vers $\mathbb{R}$, $\omega \mapsto S_t(\omega)$.

Si on fixe l'état final ω, on obtient une suite $\{S_0(\omega), S_1(\omega), S_2(\omega), S_3(\omega)\}$ appelée **trajectoire** du processus (du prix)
Par exemple, si $\omega = udu$, on obtient la trajectoire $\{S_0, S_0.u, S_0.u.d, S_0.u^2.d\}$

La trajectoire du prix de l'actif est révélée progressivement au cours du temps. À $t = 0$, il a 8 trajectoires possibles. À t=1 on observe S_1 et il reste 4 trajectoires possibles...
L'information est donc révélée progressivement sur la trajectoire du prix. On obtient ainsi une filtration de Ω, $\mathbb{F} = \{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$ (avec $\{\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_3\}$)



Conditionnelement à cette partition, on a :

$$\mathbb{E}(S_3 \mid \mathcal{P}_1) = \begin{cases} \mathbb{E}(S_3 \mid \mathcal{B}_u) & \text{sur } \mathcal{B}_u = \{uuu, uud, udu, udd\} \\ \mathbb{E}(S_3 \mid \mathcal{B}_d) & \text{sur } \mathcal{B}_d = \{duu, dud, ddu, ddd\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_3 \mid \mathcal{B}_u) &= p^2.u^3.S_0 + 2.p.q.u^2.d.S_0 + q^2.u.d^2.S_0 \\ &= (u.p + d.q)^2.u.S_0 \\ \mathbb{E}(S_3 \mid \mathcal{B}_d) &= p^2.u^2.d.S_0 + 2.p.q.u.d^2.S_0 + q^2.d^3.S_0 \\ &= (u.p + d.q)^2.d.S_0 \end{aligned}$$

Remarques : On a bien
$\mathbb{E}(\mathbb{E}(S_3 \mid \mathcal{P}_1)) = \mathbb{E}(S_3) = (u.p + d.q)^3.S_0$ et
$\mathbb{E}(S_3 \mid \mathcal{B}_i) = \frac{\mathbb{E}(S_3.\mathcal{B}_i)}{\mathbb{P}(\mathcal{B}_i)}$

Considérons maintenant le processus actualisé du prix : $\overline{S_t} = \frac{S_t}{(1+r)^t}$. Peut-on trouver les probabilités de hausse et de baisse telles que $(\overline{S_t})$ soit une martinguale par rapport à la filtration $\{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$?

On cherche la mesure de probabilité Π telle que:
$\mathbb{E}_\pi(\overline{S_i} \mid \mathcal{P}_j) = \overline{S_j} \; \forall j \leq i$
Par exemple

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\pi(\overline{S_1} \mid \mathcal{P}_0) = \overline{S_0} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}_\pi\left(\frac{S_1}{(1+r)^1} \mid \mathcal{P}_0\right) = \frac{S_0}{(1+r)^0} = S_0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}_\pi\left(\frac{S_1}{1+r}\right) = S_0 \Leftrightarrow \mathbb{E}_\pi(S_1) = (1+r)S_0 \\
\Leftrightarrow \quad & \pi.u.S_0 + (1-\pi)d.S_0 = (1+r)S_0 \Leftrightarrow \pi(u-d) = (1+r) - d \\
\Leftrightarrow \quad & \pi = \frac{(1+r)-d}{u-d}
\end{aligned}$$

Vérifions qu'alors $\mathbb{E}_\pi(\overline{S_2} \mid \mathcal{P}_1) = \overline{S_1}$

$$\mathbb{E}_\pi(\overline{S_2} \mid \mathcal{P}_1)(\omega) = \begin{cases} \mathbb{E}_\pi(\overline{S_2} \mid \mathcal{B}_u), \text{ si } \omega \in \mathcal{B}_u = \{uuu, uud, udu, udd\} \\ \mathbb{E}_\pi(\overline{S_2} \mid \mathcal{B}_d), \text{ si } \omega \in \mathcal{B}_d = \{duu, dud, ddu, ddd\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi(\overline{S_2} \mid \mathcal{B}_u) &= \frac{\mathbb{E}_\pi(S_2 \mid \mathcal{B}_u)}{(1+r)^2} = \frac{\pi u^2 S_0 + (1-\pi)u.d.S_0}{(1+r)^2} \\
&= \frac{\frac{(1+r)-d}{u-d}.u^2.S_0 + \left(1 - \frac{(1+r)-d}{u-d}\right) u.d.S_0}{(1+r)^2} \\
&= \frac{(1+r)u^2 S_0 - d.u^2.S_0 + u^2.d.S_0 - (1+r)u.d.S_0}{(u-d)(1+r)^2} \\
&= \frac{(u-d)u.S_0}{(u-d)(1+r)} = \frac{1}{1+r} u.S_0
\end{aligned}$$

De même $\mathbb{E}_\pi(\overline{S_2} \mid \mathcal{B}_d) = \frac{1}{1+r} d.S_0$.
Comme

$$\overline{S_1}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1+r} S_0 u, & \text{si } \omega \in \mathcal{B}_u \\ \frac{1}{1+r} S_0 d, & \text{si } \omega \in \mathcal{B}_d \end{cases}$$

On a bien $\mathbb{E}_\pi(\overline{S_2} \mid \mathcal{P}_1) = \overline{S_1}$

D'après les propriétés de l'espérance conditionnelle par rapport à une partition on a ensuite :
$\mathbb{E}_\pi(\overline{S_3} \mid \mathcal{P}_1) = \mathbb{E}[\mathbb{E}_\pi(\overline{S_3} \mid \mathcal{P}_2) \mid \mathcal{P}_1] = \mathbb{E}_\pi(\overline{S_2} \mid \mathcal{P}_1) = \overline{S_1}$

Remarque : La mesure de probabilité π s'appelle mesure de martinguale ou mesure corrigée du risque puisque, sous cette probabilité, le rendement espéré de l'actif risqué est égal au rendement de l'actif sans risque

Avec l'actualisation continue

Si on actualise en temps continu, la mesure de probabilité martinguale s'écrit :

$$\pi = \frac{e^r - d}{u - d}$$

Attention

- Ces deux formules sont vraies quand r est le taux d'intérêt qui prévaut entre deux périodes
- En général, r est le taux d'intérêt annuel. Dans ce cas,

$$\pi = \frac{(1+r)-d}{u-d} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{e^r - d}{u-d}$$

  représentent la probabilité neutre au risque **SI** les périodes considérées sont distantes d'un an
- Si ce n'est pas le cas, on aura

$$\pi = \frac{(1+r)^{\Delta t}-d}{u-d} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}$$

  où Δt représente l'écart entre deux périodes (exprimé comme proportion d'une année)

- Exemple : On s'intéresse à une action dont le rendement peut, au cours des deux prochains trimestres, augmenter ou diminuer de 10%.
  En considérant que le taux d'intérêt annuel est de 12%, on a:
  $\Delta t = 1/4,\ u = 1,1,\ d = 0,9$ et $r = 0,12$.
  Donc $\pi = \dfrac{(1+0,12)^{\frac{1}{4}} - 0,9}{1,1-0,9} = 0,64$

- Ceci est aussi vrai pour l'actualisation, dans l'exemple précédent on aura :

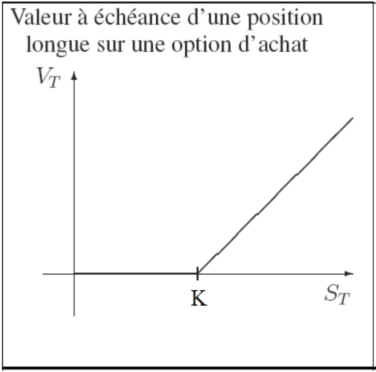
$$\overline{S_t} = \frac{S_t}{(1+0,12)^{\frac{t}{4}}}, \quad \forall t = \{1,2\}$$

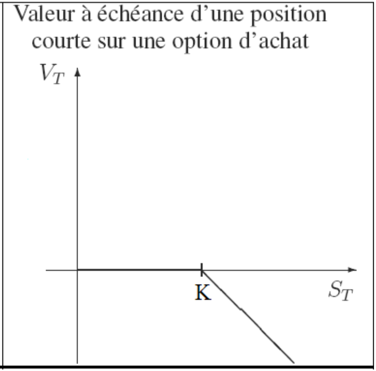
Application à l'évaluation d'option (sur action)

Rappels

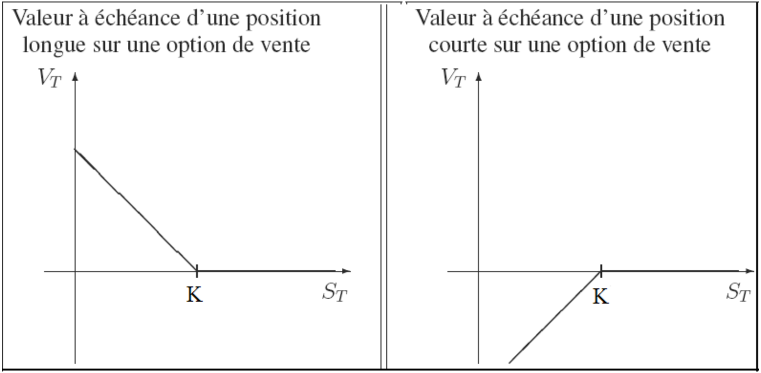
- Une option d'achat ou **call** (resp. de vente ou **put**) est un titre qui donne droit à son détenteur d'acheter (resp. de vendre) à un prix donné un certain actif, à une date donnée ou sur une période donnée.
- Le détenteur n'est pas obligé d'exercer son droit. L'acheteur et le vendeur sont donc en position asymétrique : si l'acheteur d'une option d'achat (resp. de vente) décide d'exercer son droit, le vendeur de l'option est dans l'obligation de lui vendre (resp. de lui acheter) l'actif au prix fixé.
- Si le droit ne peut être exercé qu'à une date donnée, l'option est dite de type européen, ou européenne. Si ce droit peut être exercé de la date de création de l'option à une date donnée, l'option est dite de type américain, ou américaine.

- L'acheteur (position longue) d'un call n'exercera l'option que si le prix de l'action S_T excède le prix d'exercice K





- L'acheteur d'un put n'exercera l'option que si le prix de l'action est inférieur le prix d'exercice K



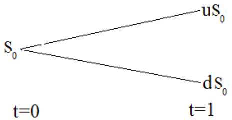
- Ces décisions doivent être prises en compte dans l'évaluation de la valeur (actuelle) des options
- La valeur (actuelle) d'une option est l'espérance de ces rendements futurs
- En l'absence d'arbitrage et dans un modèle binomial (deux rendements possible à chaque période), cette espérance sera calculée avec la probabilité sans risque (martinguale) :

$$\pi = \frac{(1+r)^{\Delta t} - d}{u - d}$$

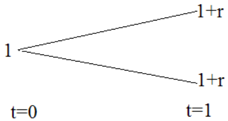
Le modèle à une période

On considère un monde à deux dates, notées 0 et 1. Il existe trois actifs dans l'économie:

1. une action, de prix S_0 à la date 0 et pouvant avoir un rendement u (état *up*) ou d (état *down*) à la date 1



2. un bon du Trésor qui rapporte $(1+r)$€ par € placé



On impose que $d < 1 + r < u$. Dans le cas contraire l'action serait systématiquement préférée au bon du trésor ou vice-versa.

3. une option d'achat (call) de type européen, dont le sous-jacent est l'action. Par définition, elle vaut $c_u = \max(0, u.S_0 - K)$ dans l'état *up* et $c_d = \max(0, d.S_0 - K)$ dans l'état *down*

Les éléments K, S_0, u, d et r sont considérées comme connus. c_d et c_u se calculent directement à partir de ces éléments.

L'objectif du modèle est de trouver la valeur de l'option à la date $t = 0$ (cad son prix) telle qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage dans l'économie.

On a vu précédemment que l'hypothèse d'AOA implique que la probabilité de survenance de l'état up est :

$$\pi = \frac{(1+r)-d}{u-d}$$

(Remarque : $0 < \pi < 1$ ssi $d < 1+r < u$)

Ainsi, la valeur actuelle de l'action, qui correspond à la espérance actualisé de sa valeur future s'écrit :

$$c = \frac{1}{1+r}\left(\pi c_u + (1-\pi)c_d\right)$$

C'est à dire

$$c = \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\max(0, u.S_0 - K) + \frac{u-(1+r)}{u-d}\max(0, d.S_0 - K)\right)$$

De la même manière, une option de vente (*put*) dont le sous-joucent est S et dont le prix d'exercice est K, vaut :

$$p = \frac{1}{1+r}(\pi p_u + (1-\pi)p_d)$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} p = \frac{1}{1+r} & \left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\max(0, K - u.S_0) \right. \\ & + \left. \frac{u-(1+r)}{u-d}\max(0, K - d.S_0) \right) \end{aligned}$$

Remarque : Si on considère un put et un call ayant le même sous-jacent et le même prix d'exercice, on a :

$$c - p = S_0 - \frac{K}{1+r}$$

Exemple

On cherche a évaluer un call européen d'échance 3 mois et de prix d'exercice 21€. Le cours de l'action est actuellement 20€. Pour simplifier, on suppose que, dans 3 mois, le cours de l'action pour augmenter de 10% au baisser de 10%. On suppose par ailleurs que le taux sans risque est de 12% annuel.

Ici, $K = 21$, $u = 1,1$, $d = 0,9$, $r = 0,12$, $\Delta t = 1/4$,
$c_u = \max(0; (1,1x20) - 21) = 1$,
$c_d = \max(0; (0,9x20) - 21) = 0$

On a donc $\pi = \dfrac{(1+0,12)^{\frac{1}{4}} - 0,9}{1,1-0,9} = 0,64$

Et : $c = \dfrac{1}{(1+0,12)^{\frac{1}{4}}}(0,64x1 + 0,36x0) = 0,622$

Couverture

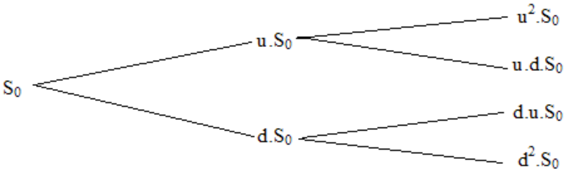
Question : Combien d'actions (sous-jacentes) doit détenir le vendeur de l'option s'il veut se couvrir contre le risque associé à l'option?

Réponse :

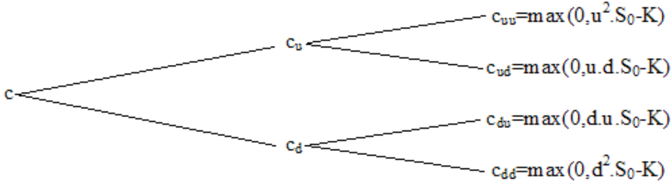
- dans l'exemple, si le vendeur détient Δ actions:
  - dans l'état *up*, la valeur des actions est 22Δ€ et le call vaut 1€ $\Rightarrow$ le portefeuille vaut $22\Delta - 1$
  - dans l'état *down*, ses actions valent 18Δ€ et la valeur du call est 0 $\Rightarrow$ le portefeuille vaut 18Δ
  - le portefeuille est donc sans risque si $22\Delta - 1 = 18\Delta$, i.e. si $\Delta = 0,25$
- dans le cas général $\Delta = \dfrac{c_u - c_d}{S_0 u - S_0 d}$

Le modèle à deux périodes

- On suppose maintenant que l'option arrive à échéance 2 périodes après son émission
- A chaque période, l'action sous-jacente peut avoir un rendement *u* ou *d*



- Dans chaque état terminal le *call* dérivé de cette action vaut donc



- Dans le cas d'un **call européen**, l'option ne peut pas être exercée à la date 1
- La valeur de l'action à chaque noeud de la date 1 est donc égale à l'espérance actualisée de la valeur finale conditionnellement au bloc considéré :
  $c_u = \frac{1}{1+r}\left(\pi c_{uu} + (1-\pi)c_{ud}\right)$ et
  $c_d = \frac{1}{1+r}\left(\pi c_{du} + (1-\pi)c_{dd}\right)$

  (on applique à chaque noeud la méthode précédente)
- La valeur initiale est alors égale à l'espérance actualisée des valeurs futures (à t=1 ou t=2)

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{1}{(1+r)}\left(\pi c_u + (1-\pi)c_d\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\left(\pi^2 c_{uu} + 2\pi(1-\pi)c_{ud} + (1-\pi)^2 c_{dd}\right)
\end{aligned}
$$

- Dans le cas d'un **call américain**, il faut prendre en compte la possibilité d'exercer l'option aux dates intermédiaires
- La valeur de l'option à la date d'échéance est la même que celle des options européennes puisqu'à cette date, il n'y a plus de différence entre les deux types d'options
- Par contre, aux dates précédentes, la valeur de l'option est le maximum de
  - l'espérance actualisée des valeurs futures
  - le bénéfice retiré de l'exercice anticipé de l'action

Formellement, on a

$$c_u = \max(u.S_0 - K; \tfrac{1}{1+r}(\pi c_{uu} + (1-\pi)c_{ud})), \text{ et}$$
$$c_d = \max(d.S_0 - K; \tfrac{1}{1+r}(\pi c_{du} + (1-\pi)c_{dd}))$$

Et, $c = \max(S_0 - K, \frac{1}{1+r}(\pi c_u + (1-\pi)c_d))$

Exemple

Le cours actuel d'une action est de 100 €. Sur chacun des 2 prochains mois on estime que les cours vont hausser de 1% ou baisser de 1%. Le taux sans risque est de 1%. Quelle est la valeur d'une option européenne d'achat (call) d'échéance 2 mois avec prix d'exercice 99 €?

On a, $S_0 = 100$, $\Delta t = 12$, $u = 1,01$, $d = 0,99$, $r = 0,01$, $K = 99$

Donc $\pi =$

Exemple

Le cours actuel d'une action est de 100 €. Sur chacun des 2 prochains mois on estime que les cours vont hausser de 1% ou baisser de 1%. Le taux sans risque est de 1%. Quelle est la valeur d'une option européenne d'achat (call) d'échéance 2 mois avec prix d'exercice 99 €?

On a, $S_0 = 100$, $\Delta t = 12$, $u = 1,01$, $d = 0,99$, $r = 0,01$, $K = 99$

$$\text{Donc } \pi = \frac{(1,01)^{\frac{1}{12}} - 0,99}{1,01 - 0,99} \simeq 0,54$$

Par ailleurs, $c_{uu} =$

Par ailleurs, $c_{uu} = \max(0; (1,01)^2(100) - 99) = 3,01$

Par ailleurs, $c_{uu} = \max(0; (1,01)^2(100) - 99) = 3,01$
$c_{ud} = c_{du} = \max(0; (1,01)(0,99)(100) - 99) = 0,99$ et
$c_{dd} = \max(0; (0,99)^2(100) - 99) = \max(0; 98,01 - 99) = 0$

Par ailleurs, $c_{uu} = \max(0; (1,01)^2(100) - 99) = 3,01$
$c_{ud} = c_{du} = \max(0; (1,01)(0,99)(100) - 99) = 0,99$ et
$c_{dd} = \max(0; (0,99)^2(100) - 99) = \max(0; 98,01 - 99) = 0$

Ainsi le call européen considéré vaut :

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{(1+0,01)^{1/6}} \left[(0,54)^2 3,01 + 2(0,54)(0,46)0,99\right] \\ &\simeq 1,37 \end{aligned}$$

Stratégie de couverture

- On se sert de ce qu'on connait, i.e. c_{uu}, c_{ud}, c_{du} et c_{dd}
- En répliquant la méthodologie exposé dans le modèle à une période, il apparait que :
  - si on est dans l'état u en 1ère période, en détenant Δ action du sous-jacent, le portefeuille du vendeur du call vaut
    - $102,1\Delta - 3,01$ dans l'état uu
    - $99,9\Delta - 0,99$ dans l'état ud
  - il s'agit donc d'un portefeuille sans risque si

$$102,1\Delta - 3,01 = 99,9\Delta - 0,99 \Leftrightarrow \quad \Delta = \frac{3{,}01 - 0{,}99}{102{,}1 - 99{,}9} \simeq 0,918$$

  - De manière analogue on obtient, en cas de baisse du cours en 1ère période

$$\Delta = \frac{c_{du} - c_{dd}}{u.d.S_0 - d^2.S_0} = \frac{0,99 - 0}{99,99 - 98,01} = 0,5$$

- Il apparait ainsi que la couverture nécessaire à la vente d'un call varie selon la réalisation de la première période
- Question : Combien le vendeur du call doit-il détenir de sous-joucent à la date initiale?
- Réponse : on calcule c_u et c_d et on applique la même méthodologie

  $$\Rightarrow \text{ en } t = 0,\ \Delta = \frac{c_u - c_d}{u.S_0 - d.S_0}$$

- ici $c_u = \frac{1}{(1+0{,}01)^{1/12}}\left[(0,54)3,01 + (0,46)0,99\right] \simeq 2,079$ et $c_d = \frac{1}{(1+0{,}01)^{1/12}}\left[(0,54)0,99 + (0,46)0\right] \simeq 0,534$
- Ainsi, en $t = 0$, $\Delta \simeq \frac{2{,}079-0{,}534}{101-99} = 0,7725$

Conclusion : La couverture nécessaire à la vente d'un call (le Δ) change à chaque date. Dans le but de maintenir une couverture sans risque, le vendeur doit ajuster le stock d'action détenues à chaque période, en fonction de la réalisation

Le cas du put

- européen :

$$
\begin{aligned}
p_{uu} &= \max(0; K - u^2 S_0) \\
p_{ud} = p_{du} &= \max(0; K - u.d.S_0) \\
p_{dd} &= \max(0; K - d^2 S_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_u &= \tfrac{1}{1+r}\left(\pi p_{uu} + (1-\pi)p_{ud}\right) \\
p_d &= \tfrac{1}{1+r}\left(\pi p_{du} + (1-\pi)p_{dd}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p &= \tfrac{1}{1+r}\left(\pi p_u + (1-\pi)p_d\right) \\
&= \tfrac{1}{(1+r)^2}\left(\pi^2 p_{uu} + 2\pi(1-\pi)p_{ud} + (1-\pi)^2 p_{dd}\right)
\end{aligned}
$$

Le cas du put

- américain :

$$
\begin{aligned}
p_{uu} &= \max(0; K - u^2 S_0) \\
p_{ud} = p_{du} &= \max(0; K - u.d.S_0) \\
p_{dd} &= \max(0; K - d^2 S_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_u &= \max\left(K - u.S_0; \tfrac{1}{1+r}\left(\pi p_{uu} + (1-\pi) p_{ud}\right)\right) \\
p_d &= \max\left(K - d.S_0; \tfrac{1}{1+r}\left(\pi p_{du} + (1-\pi) p_{dd}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
p = \max\left(K - S_0; \tfrac{1}{1+r}\left(\pi p_u + (1-\pi) p_d\right)\right)
$$

- **Attention** : Pour se couvrir, le vendeur d'un put (américain ou européen) doit vendre du sous-jacent, le Δ est donc négatif (raison : la valeur du put est une fonction décroissante de la valeur de l'action)

Généralisation

Dans un modèle à n période :

- un call européen vaut

$$\frac{1}{(1+r)^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \pi^k (1-\pi)^{n-k} \max(0; u^k d^{n-k} S_0 - K)$$

- un put européen vaut

$$\frac{1}{(1+r)^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \pi^k (1-\pi)^{n-k} \max(0; K - u^k d^{n-k} S_0)$$

Dans le cas d'option américaine, on résonne par induction à rebours:

En notant $\omega \in \Omega$ les états finaux, on a:

- $c_\omega = \max(0; u^{N_u(\omega)} d^{N_d(\omega)} S_0 - K)$
- $\forall t \in \{0, ..., n-1\}$

$$c_{[\omega]_t} = \max(u^{N_u([\omega]_t)} d^{N_d([\omega]_t)} S_0 - K; \frac{1}{1+r} \left(\pi c_{[\omega]_t u} + (1-\pi) c_{[\omega]_t d}\right)$$

c'est-à-dire $\forall t \in \{1, ..., n\}$

$$c_{[\omega]_{t-1}} = \max(u^{N_u([\omega]_{t-1})} d^{N_d([\omega]_{t-1})} S_0 - K; \tfrac{1}{1+r} \mathbb{E}_\pi \left(c_{[\omega]_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}([\omega]_{t-1})\right)$$

De même

- $p_\omega = \max(0; K - u^{N_u(\omega)} d^{N_d(\omega)} S_0)$
- $\forall t \in \{1, ..., n\}$

$$p_{[\omega]_{t-1}} = \max(K - u^{N_u([\omega]_{t-1})} d^{N_d([\omega]_{t-1})} S_0; \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_\pi \left(p_{[\omega]_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}([\omega]_{t-1}) \right.$$

Converture dans le modèle à n période

En notant $f_{[\omega]}$ la valeur de l'option (call ou put) dans l'état $[\omega]$, le nombre de sous-jacent nécessaire à la couverture de l'option dans l'état $[\omega]$:

$$\frac{f_{[\omega]u} - f_{[\omega]d}}{u.N_u([\omega]).N_d([\omega]).S_0 - d.N_u([\omega]).N_d([\omega]).S_0}$$

Exemple

Considérons un put américain à deux ans de prix d'exercice 52€ sur une action cotée actuellement 50€. La durée de vie de l'action est divisée en deux périodes d'un an chacune et, à chaque période, le cours de l'action augmente de 20 % ou baisse de 20%. Le taux sans risque est supposé égal à 5%.

On cherche à

1. évaluer le prix de l'option à la date initiale
2. construire une stratégie de couverture