*Mathématiques pour la finance*
*M1 Finance*

IAE Université de Toulouse
Année Universitaire 2008-2009

# Examen Final Semestre 2

*11 Mai 2009 - Durée : 2h*

Renaud BOURLÈS ; VO Thi Quynh Anh

**Exercice 1 : (5,5 pts)** Soit (X, Y ) un couple de variables aléatoires réelles dont la densité jointe s'écrit :

$$f(x,y) = \begin{cases} ye^{-y(x+1)} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilités (2 pts)

b. Déterminer la densité marginale de Y (1 pt)

c. Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y = y. Est-ce une loi connue? (1 pt)

d. Calculer l'espérance de cette loi conditionnelle (2 pts) (*conseil : utiliser la formule de l'intégration par partie et* $\lim_{t\to+\infty} te^{-t\lambda} = 0 \ \forall \lambda \geq 0$)

**Exercice 2 : (2,5 pts)** Calculer la fonction génératrice des moments d'une variable suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$. En **déduire** que cette variable est centrée et réduite.

**Exercice 3 : (6 pts)** Soit $X = (X_1 \ X_2 \ X_3)'$ un vecteur gaussien de loi $N_3(E(X), \Gamma_x)$ où $E(X)$=0 et $\Gamma_x$= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On définit le vecteur $Y = (Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3)'$ par $Y = \begin{cases} Y_1 = 5X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \\ Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3 \end{cases}$

a. Déterminer la loi de Y

b. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et $\beta$, $Y_1$, $Y_2$ et $Y_3$ sont-elles mutuellement indépendantes?

**Exercice 4 : (2 pts)** Soient $X$ et $Z$ deux variables aléatoires normales centrées, réduites et indépendantes. Soit la variable aléatoire $Y = Z\mathrm{Sgn}(X)$ où

$$\mathrm{Sgn}(X) = \begin{cases} 1 & si \quad X \geq 0 \\ -1 & si \quad X < 0 \end{cases}$$

a En utilisant sa fonction de répartition, montrer que $Y$ est aussi une variable aléatoire normale centrée réduite.

b Calculer $Cov\,(X, Y)$. En utilisant le fait que $Y$ est fonction de $X$, en déduire que le vecteur $(X, Y)'$ n'est pas un vecteur gaussien

*Rappel :* Dans le modèle de Black et Scholes, on suppose que le cours d'un action suit un mouvement brownien géométrique :
$S_T = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}Z}$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Alors, les valeurs d'un call ($c_0$) et d'un put ($p_0$) de maturité $T$ et de prix d'exercice $K$ ayant $S$ comme sous-jacent satisfont

$$\begin{aligned} c_0 &= S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \\ p_0 &= Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \\ \text{où} \quad d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

**Exercice 5 : (2,5 pts)**

a. Quand le cours du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique, montrer que la probabilité qu'un put européen soit exercé dans un univers risque-neutre est $\mathcal{N}(-d_2)$

b. En utilisant la table fournie en annexe, en déduire la probabilité qu'un put européen

   - sur une action actuellement côtée 52€ suivant un mouvement brownien géométrique de volatilité annuelle de 20%.
   - de prix d'exercice de 50€ et
   - d'échéance à 6 mois

   soit exercé, si le taux d'intérêt sans risque (composé en continu) est égal à 10%?

**Exercice 6 : (2 pts)** Soit $S$ le cours d'une action suivant un mouvement brownien géométrique. On considère une option binaire d'achat dont la valeur à l'échéance est :

$$B_T = \mathbb{1}_{S_T > K} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la valeur $B_0$ de cette option.

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale :

| | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7703 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7793 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8906 | 0.8925 | 0.8943 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9986 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| **3.5** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| **3.6** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.7** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.8** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.9** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

**Utilisation**

On lit les décimales dans les lignes, et les centièmes en colonnes. Par exemple, la valeur de F(1.65) se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05.