Séance de révision

Definition

On appelle **univers des possibles** (Ω) l'ensemble des issues possibles d'une expérience $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Chaque élément de Ω est appelé **événement élémentaire** et chaque sous-ensemble de Ω est appelé **événement**.

Definition

Une **fonction de distribution** est une fonction à valeur réelle $p(.)$ définie sur Ω telle que
1) $p(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$ et
2) $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Pour chaque événement E , la **probabilité** de E sera définie comme le nombre $\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$

Théorème

Les proba assignées aux elmts d'une expérience décrite par une fct de distrib définie sur Ω satisfont les propriétés suivantes

1. $0 \leq \mathbb{P}(E) \ \ \forall E \subset \Omega$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. si $E \subset F \subset \Omega$, alors $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$ $(\Rightarrow \mathbb{P}(E) \leq 1 \ \ \forall E \subset \Omega)$
4. Si les événements $E_1, ..., E_n$ forment une partition de Ω alors pour tout événement A dans Ω: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap E_i)$
   $(\Rightarrow \forall A, B \in \Omega, \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \backslash B))$
5. $\forall A, B \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$

Definition

On appelle **distribution uniforme** sur Ω la fonction de distribution qui assigne la même valeur à tous les événements élémentaires. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, la distribution de probabilité uniforme s'écrit $p(\omega) = \frac{1}{n}, \forall \omega \in \Omega$

Probabilité de Laplace

Si la distribution de probabilités sur Ω est uniforme, la probabilité d'un événement E est définie par

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)}$$

où $\text{card}(E)$ représente le cardinal de E c'est à dire le nombre d'événements élémentaires contenus dans E

Liste

Une p-liste est une collection **ordonnée** de p éléments
notion d'ordre + un même elmt peut revenir plusieurs fois
Il existe n^p p-listes de E (où $n = \text{card}(E)$)

Arrangement

Un p-arrangement est une collection **ordonnée** de p éléments **distincts**
notion d'ordre + un m̂ elmt ne peut pas revenir plusieurs fois
Il existe $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E

Combinaison

Une p-combinaison est une collection **non ordonnée** de p éléments **distincts**
pas d'ordre + un m̂ elmt ne peut pas revenir plusieurs fois
Il existe $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ p-combinaisons de E

Chapitre 3 : Événements indépendants et Probabilités conditionnelles

Definition

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

Definition

Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont **mutuellement indépendants** si $\forall p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq p \leq n$ et pour toute collection de p événements $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ip}$ on a $\mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ip}) = \mathbb{P}(A_{i1})\mathbb{P}(A_{i2})...\mathbb{P}(A_{ip})$

Definition

Soient A et B deux événements d'une même épreuve et B un événement non impossible ($\mathbb{P}(B) \neq 0$). On appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant (que l'événement) B (s'est réalisé), notée $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \text{ sachant } B)$, la probabilité $\dfrac{\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbb{P}(\mathbf{B})}$

Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i=1..n}$ une collection d'événements non impossibles formant une partition de Ω. Alors pour tout événement B de Ω:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Formule de Bayes

Soit A et B deux événements non impossibles. Alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}$$

Généralisation

Soit $(A_i)_{i=1..n}$ une collection d'événements non impossibles formant une partition de Ω. Alors pour tout événement B non impossible:

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Chapitre 4 : Espérance, Variance et Espérance Conditionnelle

Espérance

$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$

Propriétés :

- $\forall a, b \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- X et Y 2 v.a. $\Rightarrow \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Variance

$\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$

Propriétés :

- $\forall a \in \mathbb{R},\ Var(aX) = a^2 Var(X)$
- $\forall c \in \mathbb{R},\ Var(X + c) = Var(X)$

Espérance conditionnelle

L'**espérance conditionnelle** d'une v.a. X par rapport à l'événement A est: $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_A}(X)$
(où $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A)$)

Propriétés : $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid A) = \dfrac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X.\mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}$

La distribution d'un couple de v.a. X et Y est définie par

- les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
- $\forall x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$, la probabilité p_{ij} de l'évenement $[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]$

De la loi conjointe, on tire les lois marginales

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum\limits_{y_j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right] = \sum\limits_{y_j \in Y(\Omega)} p_{ij} = p_{i\bullet} \\ \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right] = \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} p_{ij} = p_{\bullet j} \end{cases}$$

Définition

Deux v.a. X et Y sont dites indépendantes si: $\forall x_i \in X(\Omega)$ et $\forall y_j \in Y(\Omega)$, on a
$\mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right] = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$

Covariance

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} = \mathrm{cov}(XY) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\right] \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Propriétés

1. $\mathrm{cov}(X, X) = \sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$
2. $\mathrm{cov}(aX + bY, Z) = a\mathrm{cov}(X, Z) + b\mathrm{cov}(Y, Z)$
3. $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y)$
4. Si X et Y sont indépendants alors $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$
   ($\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ n'implique pas nécessairement X et Y indpts)

Coefficient de corrélation

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propriétés :

- $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
- $\mid \rho_{X,Y} \mid = 1$ ssi $Y = aX + b$
  avec $a > 0$ si $\rho = 1$ et $a < 1$ si $\rho = -1$

Meilleur prédicteur linéaire

Definition

Soient X et Y deux v.a. Y peut être approximée par la relation linéaire $\alpha + \beta X$ avec ϵ comme variable aléatoire résiduelle. Le **meilleur prédicteur linéaire** de Y par X est l'appliquation linéaire $\alpha + \beta X$ qui minimise l'**erreur quadratique moyenne** $\mathbb{E}(\epsilon^2)$.

Théroème

Le meilleur prédicteur linéaire de Y par X est donné par :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \\ \alpha &= \mathbb{E}(Y) - \beta \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Application - Modèle de marché

Y =rendement d'une action S ; X =rendement du marché

$$\begin{aligned} Var(R_S) &= \beta_S^2 Var(R_M) + Var(\epsilon) \\ &= \text{risque systématique} \ + \ \text{risque spécifique} \end{aligned}$$

Définition

Une **partition** de Ω est une collection $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_k\}$ d'ensembles non vides de Ω (appélés **blocs** de la partition) qui satisfont les propriétés suivantes :

1. les blocs sont disjoints deux à deux
2. l'union des bocs correspond à l'ensemble Ω

Définition

Une partition $\mathcal{Q} = \{C_1, ..., C_n\}$ obtenue en divisant certains blocs de $\mathcal{P}$, est appelée **raffinement** de $\mathcal{P}$. On note $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$

Définition

Soit X une variable aléatoire de Ω avec $\mathrm{im}(X) = \{x_1, ..., x_n\}$ Alors X définie une partition de Ω dont les blocs sont les images inverses des éléments de $\mathrm{im}(X)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_X = \{\{X = x\} \mid x \in \mathrm{im}(X)\} = \{\{X = x_1\}, ..., \{X = x_n\}\}$$

qui est appelée partition générée par X.

X est constante dans chacun des blocs de $\mathcal{P}_X$. On dira alors que X est $\mathcal{P}_X$-**mesurable**

Mesurabilité

Soit $\mathcal{P}$ une partition de Ω. Une variable aléatoire X de Ω est dite $\mathcal{P}$-**mesurable** si X est constante dans chaque bloc de $\mathcal{P}$

Définition

Soit $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_n\}$ une partition de Ω pour laquelle $\mathbb{P}(B_i) > 0\ \forall i$. L'espérance conditionnelle d'une v.a. X par rapport à une partition est la v.a. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{P}) : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid B_1)\mathbb{1}_{B_1} + ... + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid B_n)\mathbb{1}_{B_n}$$

<u>Propriétés :</u>

- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P})) = \mathbb{E}(X)$
- Si X est $\mathcal{P}$-mesurable : $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}) = X$

Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire

Soit Y une variable aléatoire telle que $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_K\}$.

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{P}_Y) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X \mid \{Y = y_i\})\mathbb{1}_{\{Y=y_i\}}$$

Définition

Un séquence de partitions $\mathbb{F} = (\mathcal{P}_0, ..., \mathcal{P}_N)$ d'un ensemble $\Omega = \{\omega_1, ...\omega_m\}$ pour laquelle $\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec ... \prec \mathcal{P}_N$ est appelée une **filtration**

Par ailleurs, une filtration satisfaisant les propriétés suivantes est appelée une **structure d'information**:

1. $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$
2. $\mathcal{P}_N = \{\{\omega_1\}, ..., \{\omega_m\}\}$

Définition

Un **processus stochastique (fini)** est une séquence de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ définies sur Ω

Définition

Un processus stochastique $\mathbb{X} = \{X_0, X_1, \ldots, X_N\}$ est une **martinguale** par rapport à une filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec \ldots \prec \mathcal{P}_N\}$ (on dit aussi $\mathbb{F}$-**martinguale**) si si X_i est $\mathcal{P}_i$-mesurable et si

$$\mathbb{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{P}_k) = X_k$$

<u>Remarque</u> On a alors $\mathbb{E}(X_s \mid \mathcal{P}_t) = X_t \; \forall s > t$

Loi de Bernouilli

Une v.a. X suit une loi de Bernouilli si:
1) $X(\Omega) = \{0, 1\}$
2) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ $(\Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p)$

Loi Binomiale

n épreuves de Bernouilli. Proba d'avoir k "succès"?

Definition

Une v.a. X suit une loi Binomiale de paramètre n et p $(n \in \mathbb{N}^*,\ p \in [0, 1])$ si
1) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., n\}$
2) $\forall k \in X(\Omega) : \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Alors $\mathbb{E}(X) = n.p$ et $V(X) = n.p.q$

Loi du temps d'attente

Succesion d'épreuves de Bernouilli (de paramètre p) jusqu'à obtenir r succès. Soit X le nb d'épreuve.

Definition

Une v.a. X suit une loi de Pascal de paramètre r et p si

1. $X(\Omega) = \{r, r+1, r+2, ...\}$
2. $\forall k \in X(\Omega) : \mathbb{P}(X = k) = C_{k-1}^{r-1} q^{k-r} p^r$ avec $q = 1 - p$

X est le tps d'attente pour r succès.

$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$ et $V(X) = \frac{r.q}{p^2}$

Actualisation

L'actif sans risque (rendement r certain) est utilisé comme numéraire. La valeur actualisée (le prix "escompté") d'un actif S à la période t est alors donné par

$$\overline{S_t} = \frac{S_t}{(1+r)^t}$$

Chapitre 9 : Modèle CRR à 3 période

Considérons un actif valant S_0 à la période initiale. A chaque période l'actif peut être haussier (et avoir un rendement u) ou baissier (rendement d). Si on note p la probabilité d'être haussier, et S_t la valeur de l'actif à la date t, on a:
$\mathbb{E}(S_1) = (up + dq)S_0$; $\mathbb{E}(S_2) = (up + dq)^2 S_0$;
$\mathbb{E}(S_3) = (up + dq)^3 S_0$

$$\mathbb{E}(S_3 \mid \mathcal{P}_1) = \begin{cases} (u.p + d.q)^2.u.S_0 & \text{avec probabilité } p \\ (u.p + d.q)^2.u.S_0 & \text{avec probabilité } (1-p) \end{cases}$$

Théorème

La probabilité martinguale, ou probabilité corrigée du risque, telle que $\mathbb{E}_\pi(\overline{S_i} \mid \mathcal{P}_j) = \overline{S_j}\ \forall j \leq i$ s'écrit $\pi = \dfrac{(1+r)-d}{u-d}$

Valorisation d'un call européen

$$
\begin{aligned}
c_{uu} &= \max(0; u^2 S_0 - K) \\
c_{ud} = c_{du} &= \max(0; u.d.S_0 - K) \\
c_{dd} &= \max(0; d^2 S_0 - K)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_u &= \tfrac{1}{1+r}\left(\pi c_{uu} + (1-\pi)c_{ud}\right) \\
c_d &= \tfrac{1}{1+r}\left(\pi c_{du} + (1-\pi)c_{dd}\right)
\end{aligned}
$$

$$
c = \tfrac{1}{1+r}\left(\pi c_u + (1-\pi)c_d\right)
$$

Valorisation d'un call américain

$$\begin{aligned} c_{uu} &= \max(0; u^2 S_0 - K) \\ c_{ud} = c_{du} &= \max(0; u.d.S_0 - K) \\ c_{dd} &= \max(0; d^2 S_0 - K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_u &= \max\left(u.S_0 - K; \tfrac{1}{1+r}\left(\pi c_{uu} + (1-\pi)c_{ud}\right)\right) \\ c_d &= \max\left(d.S_0 - K; \tfrac{1}{1+r}\left(\pi c_{du} + (1-\pi)c_{dd}\right)\right) \end{aligned}$$

$$c = \max\left(S_0 - K; \tfrac{1}{1+r}\left(\pi c_u + (1-\pi)c_d\right)\right)$$

Stratégie de couverture d'un vendeur de call

- En t=0:

$$\Delta_0 = \frac{c_u - c_d}{uS_0 - dS_0}$$

- En t=1
  - Si up

$$\Delta_u = \frac{c_u u - c_u d}{u^2 S_0 - udS_0}$$

  - Si down

$$\Delta_d = \frac{c_d u - c_d d}{duS_0 - d^2 S_0}$$

Remarque : La stratégie de couverture d'un call américain s'écrit de la même façon. Toutefois, rien ne sert de se couvrir si l'acheteur a exercé l'option à la période précédente.