Séance de révision
Semestre 2

Definitions

Soit X une variable aléatoire continue (à valeurs réelles)

- la **fonction de densité** de X, f_x est définie par

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \ \forall [a,b] \in \mathbb{R}$$

- la **fonction de distribution** de X, F_X, est définie

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Théorème

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, et $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

Propriétés

- F_X est croissante $s < t \Rightarrow F_X(s) \leq F_X(t)$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Exemples

La distribution uniforme $\mathcal{U}(a,b)$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La distribution normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Definition

Soit X une vabiable aléatoire continue de densité f.

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Sachant que, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx$$

On peut également utiliser la fonction génératrice :
$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ qui donne $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$

- Dans le cas de la distribution uniforme $\mathcal{U}(a, b)$:
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Dans le cas de la distribution normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$
  - $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma$
  - $\mathcal{N}(0, 1)$ est appelée loi normale centrée-réduite
  - si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors $Y \equiv \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Chap 12 : Proba. conditionnelles et couple de v.a.

- Probabilité conditionnelle par rapport à un événement

$$f(x|E) = \begin{cases} f(x)/\mathbb{P}(E) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(F \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)}$$

- 2 evts E et F sont indépendants si $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$
- Soient X et Y deux v.a. continue. Alors leur fonction de distribution jointe est définie par

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

et leur fonction de densité jointe est alors définies par

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t) dt.ds$$

- On a par ailleurs,
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \text{ et } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$
- Deux variables X et Y sont **indépendantes** si
$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- Si X et Y sont indépendants alors
  - $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
  - $\mathbb{E}(X,Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
  - et plus généralement, pour toutes fonctions $g(.)$ et $h(.)$ $\mathbb{E}(g(X),h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$

- $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
  Ainsi, si X et Y sont indépendant alors $Cov(X,Y) = 0$

Définition

Soient X et Y deux variables continues. La densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est alors définie par

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

où $f_{X,Y}(x,y)$ est la densité jointe de X et Y, et f_Y la densité de Y.

Et, l'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ s'écrit

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_{X|Y}(x \mid y)dx$$

Théorème : Inégalité de Tchebychev

Soit X une v. a. d'espérance $\mu = \mathbb{E}(X)$ et de variance $\sigma^2 = V(X)$ finie. Alors pour tout $\epsilon > 0$: $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

Intuition : La probabilité de s'éloigner de la moyenne est d'autant plus petite que la variance est petite

Théorème : La Loi des Grands Nombres

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi d'espérance $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ et de variance $\sigma^2 = V(X_i)$.
Notons $S_n = X_1 + ... + X_n$. Alors pour tout $\epsilon > 0$:
$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \epsilon\right) = 1$

Intuition : La moyenne arithmétique $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$ converge (en probabilité) vers l'espérance statistique $\mu = \mathbb{E}(X_i)$

Théorème Central Limite

Soit $S_n = X_1 + ... + X_n$ la somme de n variables aléatoires indépendantes ayant la même densité d'espérance μ et de variance σ^2. Soit $S_n^* = \dfrac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}\sigma}$. Alors, pour tout $a < b$:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(a < S_n^* < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_a^b e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Ou de manière équivalente

$$\lim_{n \to +\infty} F_{S_n^*}(t) = \Phi_{0,1}(t)$$

(on parle alors de "convergence en loi")

Définition

Un vecteur aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dit gaussien (ou normal) si il peut s'écrire $X = \mu + AZ$:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ . \\ . \\ . \\ Z_m \end{pmatrix}$$

où $Z_1, \dots, Z_m$ sont des variables gaussiennes (normales) centrées réduites **indépendantes**.

Autrement dit, les composantes d'un vecteur gaussien sont des combinaisons linéaires des variables normales $Z_1, \dots, Z_m$:

$X_i = \mu_i + a_{i1}Z_1 + \dots + a_{im}Z_m$

Proposition

Soit $X = \mu + AZ$ un vecteur gaussien. Alors

- $\mathbb{E}(X) = \mu$ (c'est a dire $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$, $i = 1, ..., n$) et
- la matrice de variance-covariance de X vaut $\Gamma = AA^T$

Proposition

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^M$ *tels que* $Z = (X, Y) = (X_1, ..., X_N, Y_1, ..., Y_M)$ *est un vecteur gaussien.*

Alors X *et* Y *sont indépendants si et seulement si ils sont non corrélés* $(Cov(X_i, Y_j) = 0,\ i = 1, ..., n; j = 1, ..., m)$

Si $X = (X_1, ..., X_n)$ ($X = \mu + AZ$) est un vecteur gaussien non singulier (n=m et A inversible) de matrice de variance - covariance Γ alors il admet une densité donnée par:

$$f_x(y) = \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{det(\Gamma)}} e^{-\frac{1}{2}(y-\mu)^T \Gamma^{-1}(y-\mu)}$$

où $y = (y_1, ..., y_n)^T$ et $\Gamma = AA^T$

Si $n = 1$, on a $\Gamma = \sigma^2$ et on retrouve la densité d'une variable gaussienne
Si $n = 2$, avec $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho$ alors

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\Pi\sqrt{1 - \rho^2}} . e^{-(x^2 - 2\rho xy + y^2)/(2(1-\rho^2))}$$

Proposition

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^M$ *tels que* $Z = (X, Y)$ *est un vecteur gaussien. Alors* $\mathbb{E}(Y \mid X)$ *est égale à la régression linéaire (MPL) de* Y *sur* $\{X_1, ..., X_N\}$.

En particulier si $N = 1$ *et* $Var(X) \neq 0$

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}(Y) + \frac{cov(X, Y)}{Var(X)}(X - \mathbb{E}(X))$$

Définition

Un processus stochastique $\{W_t | t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien (ou processus de Wiener) de **volatité** σ si

1. $W_0 = 0$
2. $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma\sqrt{t}))$
3. $\{W_t\}$ est un processus à **accroissement stationnaire**, $\forall s < t,\ W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma\sqrt{t-s})$
4. $\{W_t\}$ est un processus à **accroissement indépendants**, $\forall t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n : W_{t_2} - W_{t_1},\ W_{t_3} - W_{t_2}, ...,$ $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont des v.a. indépendantes

Un mouvement Brownien avec **dérive** est alors un processus stochastique de la forme $\{\mu t + W_t \mid t \geq 0\}$ où μ est une constante et $\{W_t\}$ un mouvement brownien

Mouvement brownien standard

Un mouvement brownien $\{W_t \mid t \geq 0\}$ avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ est appelé **mouvement brownien standard**. Dans ce cas W_t a une moyenne 0 et une variance t.
N'importe quel mouvement brownien $\{W_t \mid t \geq 0\}$ de dérive μ et de variance σ^2 peut alors s'écrire $W_t = \mu t + \sigma Z_t$ où $\{Z_t \mid t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard

Définition

Un processus stochastique de la forme $\{e^{W_t} \mid t \geq 0\}$ où $\{W_t \mid t \geq 0\}$ est un mouvement brownien est appelé **mouvement brownien géométrique**

Exemple : Si $S_t = S_0 e^{H_t}$ où H_t est un mouvement brownien, on peut toujours écrire $H_t = \ln(S_t/S_0) = \mu t + \sigma W_t$ où $\{W_t\}$ est un mouvement brownien standard. Ainsi $H_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma\sqrt{t})$ et par définition S_t/S_0 suit une loi lognormale

- si X suit un processus de Wiener (mouvement brownien) général alors la variation δx durant un court intervalle δt s'écrit : $\delta x = \mu \delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\delta t}$, où $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$
- si S suit un mouvement brownien géométrique : $\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\delta t}$ et $\frac{\delta S}{S} \sim \mathcal{N}(\mu \delta t, \sigma \sqrt{\delta t})$
- un processus stochastique encore plus général, appelé **processus d'Itô**, autorise les paramètres μ et σ à être des fonctions de la variable x et du temps t :

$$\delta x = \mu(x,t)\delta t + \sigma(x,t)\epsilon\sqrt{\delta t}$$

(en supposant que $\mu(.)$ et $\sigma(.)$ restent constants entre t et $t + \delta t$)

Le lemme d'Itô

Supposons que la valeur d'une variable x suive un processus d'Itô de paramètres $\mu(x,t)$ et $\sigma(x,t)$. Le lemme d'Itô montre qu'une fonction G de x et t est caractérisée par le processus suivant

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\mu(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2(x,t)\right) dt + \frac{\partial G}{\partial x}\sigma(x,t)dz$$

où z est le même processus de Wiener standard que dans dx.

Ainsi, **G suit également un processus d'Itô** de paramètres $\frac{\partial G}{\partial x}\mu(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2(x,t)$ et $\frac{\partial G}{\partial x}\sigma(x,t)$

Dans le cas d'une action $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ et pour toute fonction $G(S,t)$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz$$

Par exemple, si $G \equiv \ln(S)$, $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ et $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$.

Ainsi, d'après le lemme d'Itô, $dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$

Ainsi G suit donc un processus de Wiener et la variation de $\ln(S)$ entre la date 0 et n'importe quelle date T suit une normale loi $\mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma\sqrt{T}\right)$, c-à-d

$$\ln(S_T) \;\sim\; \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

$\Rightarrow S_T$ (le cours de l'action) suit une loi log-normale

Chapitre 17 : Le modèle de Black et Scholes

Hypothèses

- Le cours de l'action suit un pocessus de Wiener géométrique : $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$
- Pas de restriction sur les ventes à découvert. Le produit des ventes est immédiatement et intégralement disponible.
- Pas de frais de transactions ou d'impôts. Tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles
- Pas de dividendes sur le sous-jacent pendant la durée de vie de l'actif dérivé
- Pas d'opportunités d'arbitrage
- Le marché fonctionne en continu
- Le taux sans risque, r, est constant et fixe quelle que soit la maturité du produit dérivé.

L'EDP de Black-Scholes-Merton

Soit f le cours d'un produit dérivé ayant S comme sous-jacent. D'après le Lemme d'Itô,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Ainsi, les variations aléatoires de f et S sont gouvernées par le même mouvement brownien dz. Un portefeuille composé de la vente d'une unité du produit dérivé et de l'achat de $\frac{\partial f}{\partial S}$ actions est alors sans risque. D'après l'hypothèse d'AOA ce portefeuille doit avoir le même rendement que l'actif sans risque, on a donc, pour tout produit dérivé de S :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf}$$

En résolvant cette équation dans le cas d'options européennes de vente ou d'achat (call et put), on obtient

Les formules d'évaluation de Black et Scholes

$$
\begin{aligned}
c_0 &= S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\
p_0 &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \\
\text{où} \quad d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

et où $N(x)$ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite

Ce résultat peut aussi être obtenu en prenant la limite $\Delta T \to 0$ dans le modèle CRR, ou en appliquant la méthode de l'évaluation risque-neutre